

Félcsoport, Csoport, Ábel-csoport

Félcsoport: asszociatív művelettel ellátott halmaz

Csoport: asszociatív művelettel ellátott halmaz, ahol létezik egységelem, és minden elemnek létezik inverze

Abel csoport: kommutatív csoport

1, Az alábbi egyműveletes struktúrák közül melyek alkotnak félcsoportot, melyek csoportot:

a, Páros számok halmaza a szorzás művelettel

(Félcsoport: zárt, mert két páros szám szorzata páros

a szorzás asszociatív

nincs egységelem, mert az egységelem az 1 lenne, de az 1 nem páros szám.

Ha nincs egység nincs értelme inverzről beszélni)

b, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alaphalmaz az osztás művelettel

(Egyik sem mert nem asszociatív: $(a/b)/c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \neq \frac{ac}{b} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = a/(b/c)$)

c, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a következő művelettel: $a * b = 2ab$

(Abel csoport: zárt, mert a és b valós akkor $a * b = 2ab$ is valós

asszociatív, mert $(a * b) * c = 2(2ab)c = 4abc = 2a(2bc) = a * (b * c)$

létezik egységelem, mert $a * e = a \rightarrow 2ae = a \rightarrow e = \frac{1}{2}$

létezik inverz, mert $a * a^{-1} = e \rightarrow 2aa^{-1} = \frac{1}{2} \rightarrow a^{-1} = \frac{1}{4a}$

kommutatív, mert $a * b = 2ab = 2ba = b * a$

Gyűrű, ferdetest, test

H alaphalmazon adott két művelet: +, *

Gyűrű: H halmaz a + művelettel Abel csoport, a * művelettel félcsoport, és teljesülnek a disztributív szabályok

Ferdetest: H halmaz a + művelettel Abel csoport, a $H/\{+ \text{ egységeleme} \}$ halmaz a * művelettel csoport, (az + egységelemének nincs inverze a * műveletre), és teljesülnek a disztributív szabályok

Test: olyan ferdetest, ahol a * művelet is kommutatív

2. Az alábbi kétműveletes struktúrák közül melyek alkotnak gyűrűt, melyek ferdetestet, melyek testet?

a, 2^H hatványhalmazadott két művelet: $A+B = A \cup B$ és $A*B = A \cap B$

(Egyik sem mert az unió műveletre nézve nem Abel csoport, mert:

létezik egységelem $A \cup E = A \rightarrow E = \emptyset$

de nem létezik inverz, mert ha $A \neq \emptyset$, akkor nem létezik A^{-1} melyre $A \cup A^{-1} = \emptyset$)

b, R alaphalmazon két művelet: $a + b = \sqrt[5]{a^5 + b^5}$ $a * b = 2ab$

Test, mert + Abel csoport:

$$\text{asszoc: } (a + b) + c = \sqrt[5]{\left(\sqrt[5]{a^5 + b^5}\right)^5 + c^5} = \sqrt[5]{a^5 + b^5 + c^5} = \sqrt[5]{a^5 + \left(\sqrt[5]{b^5 + c^5}\right)^5} = a + (b + c)$$

$$\text{kommutatív: } a + b = \sqrt[5]{a^5 + b^5} = \sqrt[5]{b^5 + a^5} = b + a$$

$$\text{egység: } a + e = \sqrt[5]{a^5 + e^5} = a \rightarrow e = 0$$

$$\text{inverz: } a + a^{-1} = \sqrt[5]{a^5 + (a^{-1})^5} = e = 0 \rightarrow a^{-1} = -a$$

A * műveletre nézve az $R/\{0\}$ halmaz, tehát az alaphalmaz mínusz az + egységeleme, Abel csoport, ahogy azt az 1.c feladatban láttuk.

Teljesülnek a disztributív szabályok (elég az egyiket ellenőrizni, mert kommutatív * művelet):

$$(a + b) * c = 2 \cdot \left(\sqrt[5]{a^5 + b^5}\right) \cdot c = \sqrt[5]{(a^5 + b^5) \cdot (2c)^5} = \sqrt[5]{(2ac)^5 + (2bc)^5} = a * c + b * c$$

c, alaphalmaz: pozitív valós számok

$$a + b = a * b$$

$$a * b = a^{\lg(b)}$$

(Test)

d, alaphalmaz: H hatványhalmaza

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$A * B = A \cap B$$

(Komm., egységelemes gyűrű)

Hálók

- Definíció 1 (algebrai struktúraként)**

A $(H, \vee, \wedge)$ algebrai struktúrát **hálónak** nevezzük, ha $\vee$ és $\wedge$ kétváltozós műveletek H-n, amelyekre tetszőleges $A, B, C \in H$ elemek esetén teljesülnek a következők:

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

, azaz mindkét művelet **kommutatív**,

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \text{ azaz mindkét művelet } \textbf{asszociatív}$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

elnyelési tulajdonságok teljesülnek.

- Definíció 2 (részbenrendezett halmazokkal)**

Ha egy részbenrendezett halmaz bármely kételemű részalmazának van szuprésuma és infimuma, akkor a halmazt **hálónak** nevezzük.

1. Háló-e a $(H, \vee, \wedge)$ algebrai struktúra, ha $H = \{1, 2\}$,

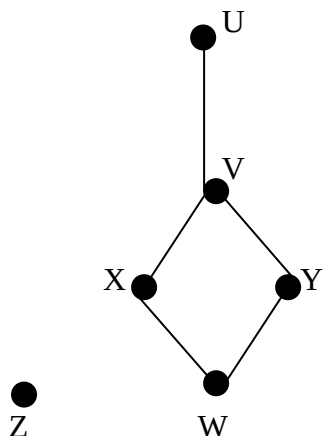
$\vee$	1	2
1	1	1
2	1	2

$\wedge$	1	2
1	1	2
2	2	2

MO: igen (Def 1-gyel)

2. Adott a következő rendezési reláció: $H = \{U, V, W, X, Y, Z\}$
 $R = \{(U, U), (V, V), (W, W), (X, X), (Y, Y), (Z, Z), (W, X), (W, Y), (W, V), (W, U), (X, V), (X, U), (Y, V), (Y, U), (V, U)\}$
 Ábrázolja Hasse diagramon, és döntse el, hogy háló-e a megadott H rendezett halmaz?

Mo.:



(Def 2-vel) nem háló, mert pl. $\{Z, Y\}$ -nak nincs infimuma, szuprémuma.

Emlékeztető:

- Részen-, vagy teljes rendezésről van szó?
 MO: részen pl. X és Y nem hasonlítható össze
- Határozza meg a maximális, minimális, legnagyobb, legkisebb elemet!
 MO:
 Maximális: Z, U
 Minimális: Z, W
 Legnagyobb: nincs
 Legkisebb: nincs
- Határozza meg a következő részhalmazok alsó-, felső korlátait valamint infimumát és szuprémumát:
 $H_1 = \{W\}$
 $H_2 = \{W, Y\}$
 $H_3 = \{W, V\}$
 $H_4 = \{W, Z\}$
 $H_5 = \{X, Y\}$
 $H_6 = \{W, X, Y\}$

MO:	inf	sup
$H_1 = \{W\}$	W	W
$H_2 = \{W, Y\}$	W	Y
$H_3 = \{W, V\}$	W	V
$H_4 = \{W, Z\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$H_5 = \{X, Y\}$	W	V
$H_6 = \{W, X, Y\}$	W	V

3. Háló-e a pozitív egész számok halmaza az oszthatóság relációval? $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$

MO: Igen, (Def 2) alapján: $\inf(a, b) = \text{lko}(a, b)$, $\sup(a, b) = \text{lkt}(a, b)$

4. Hálót alkotnak-e a megadott halmazok a következő rendezési relációval $(a,b) \in R$, ha $a|b$

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

b) $B = \{3, 5, 6, 9, 15, 30\}$

5. Igazolja, hogy $(2^H, \subseteq)$ háló (adja meg $\inf(A,B)$ -t és $\sup(A,B)$ -t is).

Vagy

Igazolja, hogy $(2^H, \cup, \cap)$ háló (adja meg $\inf(A,B)$ -t és $\sup(A,B)$ -t is).

Elsőrendű logika

1. Formalizálja az alábbi mondatokat:

a, Aki másnak vermet ás, maga esik verembe. (Univerzum az emberek halmaza)

$$\forall x(\exists y V(x,y) \rightarrow E(x))$$

$E(x)$: verembe esik, $V(x,y)$: x vermet ás y-nak

b, Van olyan makacs ember, a senki más tanácsára nem hallgat. (Univerzum az emberek halmaza)

$$\exists x(M(x) \wedge \neg \exists y(H(x,y) \wedge \neg E(x,y)))$$

$M(x)$: makacs, $H(x,y)$: x hallgat y-ra $E(x,y)$: x egyenlő y

c, Minden racionális szám estén létezik nála nagyobb irracionális szám. (Univerzum: R)

$$\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(I(y) \wedge N(y,x)))$$

$R(x)$: racionális, $I(y)$: irracionális $N(x,y)$: x nagyobb y

d, Bármely két racionális szám között található irracionális szám. (Univerzum: R)

$$\forall x \forall y [(R(x) \wedge R(y) \wedge N(y,x)) \rightarrow \exists z(I(z) \wedge N(z,x) \wedge N(y,z))]$$

$R(x)$: racionális, $I(y)$: irracionális $N(x,y)$: x nagyobb y

e, Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként. (Univerzum: R)

$$\forall x \exists y \exists z [(N(x,2) \wedge P(x)) \rightarrow (T(y) \wedge T(z) \wedge E(f(z,y),x))]$$

$N(x,y)$: $x > y$; $P(x)$: páros; $T(x)$: prím; $E(x,y)$: egyenlőség; $f(x,y)$: összeadás

f, Minden lében van két kanál. (Univerzum a minden dolgok halmaza)

Van olyan kalap, ami minden zoknihoz illik. (Univerzum a minden dolgok halmaza)

Egy, csak egy legény van talpon a vidéken. (Univerzum az emberek halmaza)

Vannak repülő és futómadarak (Univerzum az élőlények halmaza)

2. Hozza Prenex konjunktív normál formára, majd Skólem normálformára:

a,

$$\exists x[\exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \rightarrow \forall y \exists z(G(x, y, z))]$$

$$\text{M.o.: } \exists x[\neg \exists y(B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$$

$$\exists x[\forall y \neg (B(x, y) \wedge P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$$

$$\exists x[\forall y(\neg B(x, y) \vee \neg P(y)) \vee \forall y \exists z(G(x, y, z))]$$

$\forall y$ nem emelhető ki ezért új ismeretlenek kellenek:

$$\exists x[\forall y_1(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee \forall y_2 \exists z(G(x, y_2, z))]$$

$$\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z[(\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(x, y_2, z))]$$

$$\exists x \forall y_1 \forall y_2 \exists z[\neg B(x, y_1) \vee \neg P(y_1) \vee G(x, y_2, z)] \quad \text{Prenex KNF}$$

Skólemizálás: $x \leftarrow c; z \leftarrow f(y_1, y_2)$

$$\forall y_1 \forall y_2[(\neg B(c, y_1) \vee \neg P(y_1)) \vee (G(c, y_2, f(y_1, y_2)))]$$

$$\text{b, } \exists x K(x) \vee \neg \forall x[(R(x) \wedge T(x)) \rightarrow Q(x)] \rightarrow \neg \forall y(\neg Q(y) \rightarrow P(x, y))]$$

$$\text{M.o.: } \exists x K(x) \vee \neg \forall x[\neg (\neg (R(x) \wedge T(x)) \vee Q(x)) \vee \neg \forall y(Q(y) \vee P(x, y))]$$

$$\exists x K(x) \vee \exists x \neg [((R(x) \wedge T(x)) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists y \neg (Q(y) \vee P(x, y))]$$

$$\exists x K(x) \vee \exists x [\neg (R(x) \wedge T(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \neg \exists y \neg (Q(y) \vee P(x, y))]$$

$$\exists x K(x) \vee \exists x [(\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y (Q(y) \vee P(x, y))]$$

$\exists x$ kiemelhető itt, ezért nem kell új ismeretlen:

$$\exists x \forall y [K(x) \vee ((\neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (Q(y) \vee P(x, y)))]$$

Ez Prenex, de nem KNF, ezért disztributív szabályt használunk:

$$\exists x \forall y [(K(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(x) \vee Q(x)) \wedge (K(x) \vee Q(y) \vee P(x, y))] \quad \text{Prenex KNF}$$

Skólemizálás: $x \leftarrow c$

$$\forall y [(K(c) \vee \neg R(c) \vee \neg T(c) \vee Q(c)) \wedge (K(c) \vee Q(y) \vee P(c, y))]$$

$$\text{c, } \forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (P(x) \rightarrow R(x, y))) \wedge \neg \forall z(P(z) \rightarrow Q(z, x))$$

$$\text{M.o.: } \forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \neg \forall z(\neg P(z) \vee Q(z, x))$$

$$\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \exists z \neg (\neg P(z) \vee Q(z, x))$$

$$\forall x(\exists y Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y))) \wedge \exists z (P(z) \wedge \neg Q(z, x))$$

$$\forall x \exists y \exists z (Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z, x)))$$

$$\forall x \exists y \exists z (Q(x, y) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(z, x)) \quad \text{Prenex KNF}$$

Skólemizálás: $y \leftarrow f(x); z \leftarrow g(x)$

$$\forall x (Q(x, f(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x, f(x))) \wedge P(g(x)) \wedge \neg Q(g(x), x))$$

$$\text{d, } \forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \neg \forall x (\neg B(x) \rightarrow C(y))$$

$$\forall x P(x) \vee \neg \exists x [\forall y Q(x, y) \vee \neg R(c, y)]$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x)) \rightarrow \neg \forall x \exists y C(x, y)$$

3. Rezolúció

a, Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$$\begin{aligned} & \forall x((A(x, Ernő) \wedge N(x)) \rightarrow B(x)) \\ & \forall x((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y)) \\ & \neg T(Lajos) \wedge S(Lajos) \\ & \forall x(S(x) \rightarrow N(x)) \\ & \Rightarrow B(Lajos) \end{aligned}$$

M.o.:

Minden feltételt és a következmény negáltját is Skólem normálformára alakítunk:

$$\begin{aligned} & \forall x((A(x, Ernő) \wedge N(x)) \rightarrow B(x)) \equiv \forall x(\neg(A(x, Ernő) \wedge N(x)) \vee B(x)) \equiv \\ & \equiv \forall x((\neg A(x, Ernő) \vee \neg N(x)) \vee B(x)) \equiv \forall x(\neg A(x, Ernő) \vee \neg N(x) \vee B(x)) \\ & \forall x((T(x) \vee S(x)) \rightarrow \forall y A(x, y)) \equiv \forall x(\neg(T(x) \vee S(x)) \vee \forall y A(x, y)) \equiv \\ & \equiv \forall x((\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \vee \forall y A(x, y)) \equiv \forall x \forall y((\neg T(x) \wedge \neg S(x)) \vee A(x, y)) \equiv \\ & \equiv \forall x \forall y((\neg T(x) \vee A(x, y)) \wedge (\neg S(x) \vee A(x, y))) \end{aligned}$$

(Vegyük észre, hogy az utolsó lépésben a disztributív szabály segítségével alakítottuk a kvantorok utáni kifejezést konjunktív normál formára!)

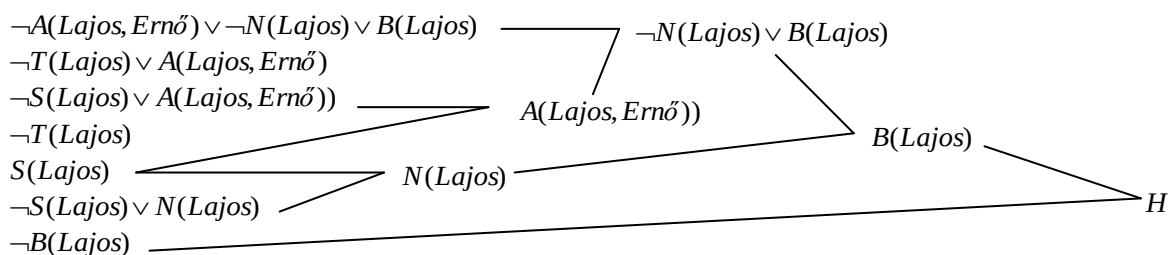
$$\neg T(Lajos) \wedge S(Lajos)$$

$$\forall x(S(x) \rightarrow N(x)) \equiv \forall x(\neg S(x) \vee N(x))$$

$$\neg B(Lajos)$$

Értéket adunk a változóknak: Lajos $\rightarrow$ x, Ernő $\rightarrow$ y

Klózok és a rezolúció:



b, Igazolja rezolúcióval, hogy helyes az alábbi következtetési séma:

$$\begin{aligned} & \forall x [P(x) \rightarrow Q(f(x), x)] \\ & P(g(b)) \\ \Rightarrow & \exists y \exists z Q(y, z) \end{aligned}$$

Mo.:

$$\begin{aligned} & \forall x [P(x) \rightarrow Q(f(x), x)] = \forall x [\neg P(x) \vee Q(f(x), x)] \\ & P(g(b)) \\ & \neg [\exists y \exists z Q(y, z)] = \forall x \forall z \neg Q(y, z) \end{aligned}$$

Értékkadás: $x \leftarrow g(b); z \leftarrow g(b); y \leftarrow f(g(b))$

Klózok:

$$\begin{array}{c} \neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)) \\ P(g(b)) \quad \quad \quad Q(f(g(b)), g(b)) \\ \neg Q(f(g(b)), g(b)) \quad \quad \quad \text{nil} \end{array}$$

c, Formalizáljuk az alábbi állításokat és rezolúcióval mutassuk meg a következtetés helyességét!

1. „Minden 2-nél nagyobb prímszám páratlan.”
2. „Páratlan szám négyzete páratlan.”
3. „A 7 prímszám.”
4. „A 7 nagyobb mint 2.”
5. Következtetés: „A 7^2 páratlan.”

Mo: $N(,)$: nagyobb, mint; $P()$: prím; $PT()$: páratlan; $f()$: négyzetre emelés művelete

1. $\forall x [(N(x, 2) \wedge P(x)) \rightarrow PT(x)]$
2. $\forall x [PT(x) \rightarrow PT(f(x))]$
3. $P(7)$
4. $N(7, 2)$
5. $PT(f(7))$

Prenex KNF alakra hozás:

$$\begin{aligned} & \forall x (\neg N(x, 2) \vee \neg P(x) \vee PT(x)) \wedge \forall y [\neg PT(y) \vee PT(f(y))] \wedge P(7) \wedge N(7, 2) \wedge \neg PT(f(7)) \\ & \forall x \forall y [(\neg N(x, 2) \vee \neg P(x) \vee PT(x)) \wedge (\neg PT(y) \vee PT(f(y))) \wedge P(7) \wedge N(7, 2) \wedge \neg PT(f(7))] \end{aligned}$$

Ez egyben SKNF alak is.

Egységesítő helyettesítés: $x \leftarrow 7, y \leftarrow 7$

Rezolúció:

$$\begin{array}{c} \neg N(7, 2) \vee \neg P(7) \vee PT(7) \\ \neg PT(7) \vee PT(f(7)) \\ P(7) \\ N(7, 2) \\ \neg PT(f(7)) \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg N(7, 2) \vee \neg P(7) \vee PT(f(7)) \\ \neg N(7, 2) \vee PT(f(7)) \\ PT(f(7)) \end{array} \quad \text{nil}$$

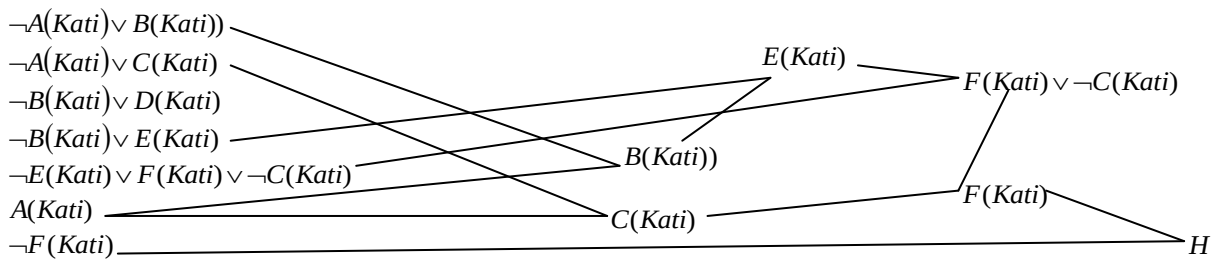
d, Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$$\begin{array}{l} \forall x[A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))] \\ \forall x[B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x))] \\ \forall x[E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))] \\ \hline A(Kati) \\ \hline F(Kati) \end{array}$$

M.o.:

$$\begin{array}{l} \forall x[A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x))] \equiv \forall x[\neg A(x) \vee (B(x) \wedge C(x))] \equiv \forall x[(\neg A(x) \vee B(x)) \wedge (\neg A(x) \vee C(x))] \\ \forall x[B(x) \rightarrow (D(x) \wedge E(x))] \equiv \forall x[\neg B(x) \vee (D(x) \wedge E(x))] \equiv \forall x[(\neg B(x) \vee D(x)) \wedge (\neg B(x) \vee E(x))] \\ \forall x[E(x) \rightarrow (F(x) \vee \neg C(x))] \equiv \forall x[\neg E(x) \vee (F(x) \vee \neg C(x))] \equiv \forall x[\neg E(x) \vee F(x) \vee \neg C(x)] \\ \hline A(Kati) \\ \hline \neg F(Kati) \end{array}$$

Értékkadás: $Kati \rightarrow x$,



e, Döntse el elsőrendű rezolúcióval, hogy helyes-e az alábbi következtetés!

$$\begin{array}{l} \forall x[R(x) \rightarrow \exists yP(x,y)] \\ \forall z[R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(z)] \\ \forall y[A(y) \rightarrow D(b)] \\ \hline \exists y \exists z P(y,z) \end{array}$$

M.o.:

$$\begin{array}{l} \forall x[R(x) \rightarrow \exists yP(x,y)] \equiv \forall x[\neg R(x) \vee \exists yP(x,y)] \equiv \forall x \exists y[\neg R(x) \vee P(x,y)] \equiv \forall x[\neg R(x) \vee P(x,a)] \\ \forall z[R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(z)] \\ \forall y[A(y) \rightarrow D(b)] \equiv \forall y[\neg A(y) \vee D(b)] \\ \hline \neg(\exists y \exists z P(y,z)) \equiv \forall y \forall z \neg P(y,z) \end{array}$$

Értékkadás után a klózik:

$$\begin{array}{l} \neg R(h(c)) \vee P(h(c),a) \\ R(h(c)) \vee A(h(c)) \vee \neg D(b) \\ \neg A(h(c)) \vee D(b) \\ \neg P(h(c),a) \end{array}$$

f,

- $\forall x[(T(x) \vee F(x)) \rightarrow R(x)]$
- $\forall x[C(x) \rightarrow (\neg O(x) \wedge F(x))]$
- $C(\text{Gábor})$
-

a, Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum a góték halmaza, és adottak a következők:

$T(x)$ = Tüskés
 $F(x)$ = Tud fütyülni
 $R(x)$ = Szereti a répatortát
 $C(x)$ = Csíkos
 $O(x)$ = Okos

b, Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Gábor a göte szereti a répatortát!

g,

- $\forall x[Z(x) \rightarrow (\neg L(x) \wedge P(x))]$
- $\forall x[(P(x) \vee T(x)) \rightarrow M(x)]$
- $Z(\text{Dumbó})$

a, Fogalmazza meg a mondatok jelentését, ha az univerzum az elefántok halmaza, és adottak a következők:

$Z(x)$ = Zöld
 $L(x)$ = Lila fülű
 $P(x)$ = Pöttyös fülű
 $T(x)$ = Látott már zebrát
 $M(x)$ = Szereti Mozartot

b, Rezolúció segítségével bizonyítsa be, hogy Dumbó a kiselefánt szereti Mozartot!

Extra Feladat: Adottak a következő axiómák:

1. Minden kutya egész éjszaka üvölt.
2. Azoknál, akinek van valamilyen macskájuk, nincsenek egerek.
3. A nyugodtan alvóknak nincs semmilyük, ami éjszaka üvölt.
4. Jánosnak kutyája vagy macskája van.
5. Konklúzió: ha János nyugodtan alvó, akkor Jánosnál nincsenek egerek.

Bizonyítsa rezolúcióval a következtetést!

Mo.:

1.lépés: formalizálás

1. $\forall x(Kutya(x) \rightarrow \ddot{U}völt(x))$
2. $\forall x \forall y([Rendelkezik(x, y) \wedge Macska(y)] \rightarrow \neg \exists z[Rendelkezik(x, z) \wedge Egér(z)])$
3. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg \exists y(Rendelkezik(x, y) \wedge \ddot{U}völt(y)))$
4. $\exists x(Rendelkezik(János, x) \wedge [Macska(x) \vee Kutya(x)])$
5. $A(János) \rightarrow \neg \exists z(Rendelkezik(János, z) \wedge Egér(z))$

2.lépés: átalakítás

1. $\forall x(K(x) \rightarrow \ddot{U}(x)) \equiv \forall x(\neg K(x) \vee \ddot{U}(x))$
2. $\forall x \forall y([R(x, y) \wedge M(y)] \rightarrow \neg \exists z[R(x, z) \wedge E(z)])$
 $\forall x \forall y([R(x, y) \wedge M(y)] \rightarrow \forall z \neg [R(x, z) \wedge E(z)])$
 $\forall x \forall y \forall z (\neg [R(x, y) \wedge M(y)] \vee \neg [R(x, z) \wedge E(z)])$
 $\forall x \forall y \forall z [\neg R(x, y) \vee \neg M(y) \vee \neg R(x, z) \vee \neg E(z)]$
3. $\forall x(A(x) \rightarrow \neg \exists y(R(x, y) \wedge \ddot{U}(y)))$
 $\forall x(A(x) \rightarrow \forall y \neg (R(x, y) \wedge \ddot{U}(y)))$
 $\forall x \forall y(A(x) \rightarrow \neg R(x, y) \vee \neg \ddot{U}(y))$
 $\forall x \forall y(A(x) \rightarrow \neg R(x, y) \vee \neg \ddot{U}(y))$
 $\neg A(x) \vee \neg R(x, y) \vee \neg \ddot{U}(y)$
4. $\exists x(R(\text{János}, x) \wedge [M(x) \vee K(x)])$

Skólemizálás: $x \leftarrow a$: $R(\text{János}, a) \wedge [M(a) \vee K(a)]$

5. $A(\text{János}) \rightarrow \neg \exists z(R(\text{János}, z) \wedge E(z))$
 $\neg [\neg A(\text{János}) \vee \neg \exists z(R(\text{János}, z) \wedge E(z))]$
 $A(\text{János}) \wedge \exists z(R(\text{János}, z) \wedge E(z))$

Skólemizálás: $z \leftarrow b$: $A(\text{János}) \wedge R(\text{János}, b) \wedge E(b)$

Értékkadás után a klózok: (A különböző formulákban a változók értékei különbözőek lehetnek, úgy kell megválasztani őket, hogy a rezolúció során ellentmondásra jussunk)

1. $\neg K(a) \vee \ddot{U}(a)$
2. $\neg R(\text{János}, a) \vee \neg M(a) \vee \neg R(\text{János}, b) \vee \neg E(b)$
3. $\neg A(\text{János}) \vee \neg R(\text{János}, a) \vee \neg \ddot{U}(a)$
4. $R(\text{János}, a)$
5. $M(a) \vee K(a)$
6. $A(\text{János})$
7. $R(\text{János}, b)$
8. $E(b)$

Nagyságrendek

1, Az alábbi állításokról döntse el, és igazolja, hogy igazak-e vagy sem!

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| a, $5x^3 + 7 = O(x^3)$ | b, $5x^3 + 7 = \Omega(x^3)$ | c, $5x^3 + 7 = \Theta(x^3)$ |
| d, $5x^3 + 7 = O(x^2)$ | e, $5x^3 + 7 = \Omega(x^2)$ | f, $5x^3 + 7 = \Theta(x^2)$ |
| g, $x^2 + 7x + 3 = O(x^4)$ | h, $x^2 + 7x + 3 = \Omega(x^4)$ | i, $x^2 + 7x + 3 = \Theta(x^4)$ |
| j, $x^2 + 7x + 3 = O(x^2)$ | k, $x^2 + 7x + 3 = \Omega(x^2)$ | l, $x^2 + 7x + 3 = \Theta(x^2)$ |
| m, $x^4 = O(3x^7)$ | n, $x^4 = \Omega(3x^7)$ | o, $x^4 = \Theta(3x^7)$ |
| p, $x^2 = O(x^2 + 4x + 1)$ | g, $x^2 = \Omega(x^2 + 4x + 1)$ | r, $x^2 = \Theta(x^2 + 4x + 1)$ |

Számosságok

Az órai anyag a legjobb alap amire ennél a résznél építkedhetsz, először azt tanuld meg!!

- 1.a, Hány olyan egység sugarú kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái egész számok? (metszhetik egymást a körök)
b, Hány olyan kör rajzolható a síkra, aminek a középpontjának koordinátái, és a sugara is egész szám? (metszhetik egymást a körök)
c, Mennyi az origó középpontú egység sugarú kör belső pontjainak számossága? A bizonyításhoz add meg a megfelelő bijektív függvényt!
d, Hány origó középpontú körvonallal fedhető le a sík? A bizonyításhoz itt is add meg a megfelelő bijektív függvényt!

Mo.:

- a, A kérdés valójában annyi, hogy hány olyan pont van a síkon amelynek mindkét koordinátája egész szám! Ez ilyen pontok számossága megszámlálhatóan végtelen, egy lehetséges felsorolás: első helyen az origó áll, aztán csigavonalban sorban a többi!
b, A sík egész koordinátájú pontjait az 1.a, feladat szerint felsorolhatjuk, és minden egyes ponthoz tartozik a $0,1,2,3,\dots$ sugarú körök megszámlálhatóan végtelen halmaza! Megszámlálhatóan végtelenszer megszámlálhatóan végtelen is megszámlálható, például a táblázatba rendezős módszerrel!
c, A kört felvetíthetjük egy félgömbre, a félgömböt a gömb középpontjából rávetíthetjük a síkra, a sík pedig kontinuum számosságú! Más lehetőség: polár koordinátákkal!
d, Az összes origó középpontú körvonalra szükség van! Mindenkörhöz a sugarát hozzárendelve, megadtunk egy bijektív függvényt a körök és a $[0, \infty)$ intervallum között ha ez még nem elég akkor pl: $\ln x$ bijektív függvény a $(0, \infty)$ és a $(-\infty, \infty)$ között, tehát kontinuum sok egyenesre van szükségünk!

2. Adja meg az alábbi halmazok számosságát:

a, A páratlan természetes számok halmaza

Mo: Megszámlálható, mert az elemeit sorba rendezhetjük és így megadhatunk egy bijekciót a természetes számok és a halmaz elemei között: $A = \{1,3,5,7,\dots\}$

b, $A = \{\text{hárommal nem osztható egész számok}\}$.

Rendezzük sorba A elemeit így: $1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,\dots$. Ez egy bijekciót definiál A és $\mathbb{N}$ között, tehát A számossága megszámlálhatóan végtelen

c, Hány olyan pont van a síkon, amelynek mindkét koordinátája racionális szám?

Táblázatba rendezve az órán tanult módon a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ racionális számpárokat cikk cakk módszerrel rendezhetők és belátható, hogy számosságuk megszámlálhatóan végtelen.

3. Igazolja a megfelelő bijekció megadásával (rajzzal és vetítéssel), hogy az alábbi halmazok számossága megegyezik! (Ebből kis meggondolással arra is tudunk következtetni, hogy mindegyik kontinuum számosságú)

a, $(0,1)$ intervallum és az $\mathbb{R}$ valós számok halmaza

b, (a,b) intervallum és az $\mathbb{R}$ valós számok halmaza

c, $(0,1)$ és $(0,1]$ intervallumok (itt kivételesen könnyebb nem rajzzal, hanem megfelelő hozzárendeléssel megadni a bijekciót)

d, Egyetlen pontban kilyukasztott körvonal és a valós számok halmaza

e, Körvonal és négyzet-vonal

f, Egyetlen pontban kilyukasztott gömbfelszín és az $\mathbb{R}^2$ sík pontjai (sztereografikus projekció)

g, Két különböző sugarú körfelület

h, Két tetszőleges háromszög (mint felület)

4. Adja meg az alábbi halmazok számosságát:

a, A komplex számok halmaza

b, Azon komplex számok halmaza, melyeknek valós és képzetes része is egész szám.

$B = \{a+bi, \text{ ahol } a \text{ és } b \text{ egész}\}$

c, Azon komplex számok halmaza melyeknek képzetes része $3i$.

$C = \{a+3i, \text{ ahol } a \text{ tetszőleges valós szám}\}$

Síkgráfok

Kuratowski-tétel: egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nincs olyan részgráfja, ami a K_5 -el, vagy a $K_{3,3}$ -al topologikusan izomorf (homeomorf).

Euler síkgráfokra vonatkozó tétele: ha G összefüggő síkgráf, akkor: $p-e+t = 2$. (Jelölés: e =élek száma, t =tartományok száma, p =pontok (csúcsok) száma.)

Euler tétel következménye 1: ha G összefüggő síkgráf és legalább 3 pontja van, akkor:
 $e \leq 3 \cdot p - 6$

Euler tétel következménye 2: ha G összefüggő síkgráf, legalább három pontja van, és nem tartalmaz három élhosszú kört, akkor: $e \leq 2 \cdot p - 4$

Vigyázat a következmények szükséges, de nem elégséges feltételeket adnak ahhoz, hogy egy gráf síkgráf legyen!

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő gráf (K_6) nem lehet síkgráf:

Megoldás:

Kuratowski tétel segítségével is látható, mert a gráfnak van részgráfja ami topologikusan izomorf K_5 -el.

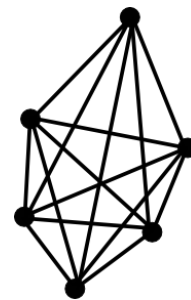
Nézzük meg azonban az Euler-tétel segítségével is:

$e \leq 3 \cdot p - 6$ szükséges, hogy teljesüljön ahhoz, hogy síkgráf lehessen.

Esetünkben: $e = (6 \cdot 5) / 2 = 15$, $c = 6$

$30 \leq 3 \cdot 6 - 6$

$30 \leq 12$, amiből következik, hogy nem síkgráf.



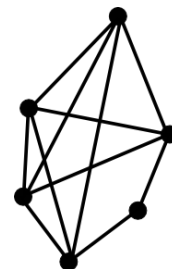
2, Döntse el az alábbi gráfról, hogy síkbarajzolható-e?

Mo.:

- Kuratowski tétel alapján nem síkbarajzolható, mert homeomorf K_5 -el.

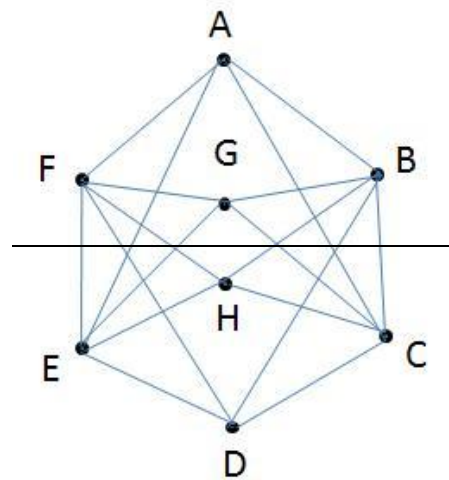
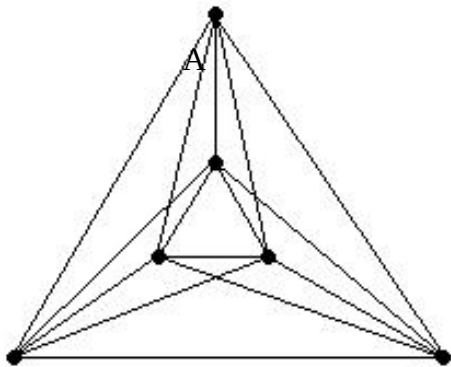
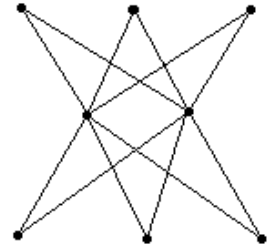
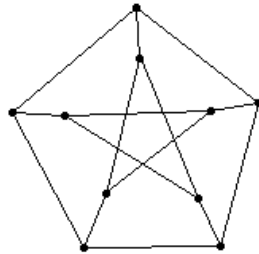
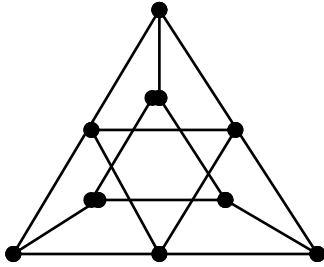
- Az Euler tétel első következménye alapján nem tudnánk választ adni, mert a gráfra teljesül: $e \leq 3 \cdot p - 6$ hiszen $11 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$

- A második következmény pedig nem használható, mert van három élhosszúságú kör.



3.

a, Melyik gráf rajzolható síkba a következők közül? Amelyik nem, indokolja meg miért nem. Amelyik síkbarajzolható, annak adja meg egy lerajzolását!



4.

a, Adott a G véges egyszerű 6-reguláris (minden csúcsára 6 él illeszkedik) gráf. Döntse el, hogy síkbarajzolható-e ez a gráf!

b, Síkba rajzolható-e az az n csúcsú gráf, amelynek $n-2$ csúcsára 6 él illeszkedik, két csúcsára pedig 7?