

*ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS INHOMOGÉN EGYENLET MEGOLDÁSA
A PRÓBAFÜGGVÉNY MÓDSZERÉVEL*

(Összeállította: Csörgő István, 2007.)

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ adottak, és tekintsük az $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ függvényekre felírt

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y$$

állandó együtthatós lineáris differenciáloperátort. Ennek karakterisztikus polinomja:

$$P(z) := z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

A karakterisztikus polinom gyökei segítségével tudjuk megadni az $L(y) = 0$ homogén egyenlet $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ alapmegoldásait, az ún. alaprendszert. Ezt az eljárást ismertnek tételezzük fel. Ismerjük azt az eljárást is, hogy valós a_j együtthatók esetén hogyan kaphatunk valós értékű függvényekből álló alaprendszert $(y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R})$. A továbbiakban az $L(y) = f$ inhomogén egyenlet egy $y_p : I \rightarrow \mathbb{C}$ partikuláris megoldásának keresésével foglalkozunk abban az esetben, amikor $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ speciális függvény, pongyolán fogalmazva, amikor a jobb oldalon álló f függvény

”polinom-szor exponenciális-szor trigonometrikus” szerkezetű tagok összege.

Máris feltehető, hogy ez az összeg egyetlen tagból áll, hiszen ha y_{pk} megoldása az $L(y) = f_k$ egyenletnek ($k = 1, \dots, m$), akkor - az L linearitása miatt - $y_p := y_{p1} + \dots + y_{pm}$ megoldása az $L(y) = f_1 + \dots + f_k$ egyenletnek (szuperpozíció elve).

Az eljárás kiindulópontja az alábbi tétel, mely a ”polinom-szor exponenciális” típusú jobb oldalra vonatkozik:

1.1 Tétel. *A fent bevezetett jelölések mellett legyen $\lambda \in \mathbb{C}$, és jelölje r a λ multiplicitását a P karakterisztikus polinomban (ha λ nem gyöke P -nek, akkor legyen $r := 0$). Legyen továbbá $Q : I \rightarrow \mathbb{C}$ egy N -edfokú polinom. Ekkor az*

$$L(y) = Q(x) \cdot e^{\lambda x}$$

egyenletnek van

$$y_p = x^r \cdot R(x) \cdot e^{\lambda x}$$

alakú megoldása, ahol $R : I \rightarrow \mathbb{C}$ egy legfeljebb N -edfokú polinom.

Ha a differenciálegyenlet a_j együtthatói, a Q polinom együtthatói, valamint a λ szám valósak, akkor R együtthatói is valósak, tehát y_p valós értékű függvény.

A tétel következménye az az eset, amikor a ”trigonometrikus szorzó” is belép.

1.2 Tétel. *Jelölje i a képzetes egységet ($i = \sqrt{-1}$).*

Az előző tétel feltételeihez képest legyen legyen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, és jelölje r a $\lambda + \mu i$ multiplicitását a P karakterisztikus polinomban (ha $\lambda + \mu i$ nem gyöke P -nek, akkor legyen $r := 0$). Legyenek továbbá $Q_1, Q_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ legfeljebb N -edfokú polinomok, melyek legalább egyike nem azonosan 0. Ekkor az

$$L(y) = e^{\lambda x} \cdot (Q_1(x) \cdot \cos \mu x + Q_2(x) \cdot \sin \mu x)$$

egyenletnek van

$$y_p = x^r \cdot e^{\lambda x} \cdot (R_1(x) \cdot \cos \mu x + R_2(x) \cdot \sin \mu x)$$

alakú megoldása, ahol $R_1, R_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ legfeljebb N -edfokú polinomok.

Ha a differenciálegyenlet a_j együtthatói, a Q_1 és Q_2 polinomok együtthatói, valamint a λ és a μ számok valósak, akkor R_1 és R_2 együtthatói is valósak, tehát y_p valós értékű függvény.

Bizonyítás. Vázlatosan: $\cos \mu x$ -et és $\sin \mu x$ -et kifejezzük az exponenciális függvényekkel (Euler-formula), majd - megfelelő rendezés után - alkalmazzuk az előző tételt. $\square$

1.3 Megjegyzés.

1. Látható, hogy $\mu = 0$ esetén az előző tételhez jutunk. Ilyenkor $Q(x) = Q_1(x)$, $R(x) = R_1(x)$, $\lambda + \mu i = \lambda$.
2. Fontos szerepe van annak, hogy a $\lambda + \mu i$ szám gyöke-e a karakterisztikus polinomnak, s ha igen, akkor hányszoros gyöke (r értékének meghatározása). Az első tételben persze - $\mu = 0$ miatt - $\lambda + \mu i = \lambda$.
Nevezzük a továbbiakban a $\lambda + \mu i$ számot "rezonáló gyök"-nek.

A módszert a gyakorlatban így célszerű végrehajtani:

1. lépés: Tisztázzuk, hogy a $\mu = 0$ vagy a $\mu \neq 0$ esettel van-e dolgunk.
2. lépés: Megállapítjuk a $\lambda + \mu i$ rezonáló gyököt, megnézzük, hogy hányszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak. Ezzel meghatározzuk r értékét, s az x^r hatványt.
3. lépés: A keresett polinomokat (R ill. R_1, R_2) "határozatlan együtthatókkal" felvesszük.
4. lépés: Előállítjuk az y_p próbafüggvényt (határozatlan együtthatókkal).
5. lépés: y_p -t (megfelelő számú deriválás után) behelyettesítjük a differenciálegyenletbe.
6. lépés: A megfelelő együtthatók egyenlővé tételével kapott egyenletrendszert megoldjuk. Így megkapjuk a határozatlan együtthatók értékét, s ezzel megvan az y_p partikuláris megoldás.

A továbbiakban 10 db kidolgozott példa következik, melyeknél az alapintervallum végig $I = \mathbb{R}$. Mivel a cél a próbafüggvény-módszer szemléltetése, ezért az első 7 példában a differenciáloperátor (vagyis a differenciálegyenlet bal oldala) ugyanaz lesz, és csak egy partikuláris megoldást keresünk. Az utolsó 3 példában megváltozik a diff. egyenlet bal oldala, itt az összes megoldást fogjuk keresni.

Az első 7 példa közös differenciáloperátora:

$$L(y) := y'' - y' - 2y.$$

Karakterisztikus polinomja:

$$P(z) = z^2 - z - 2,$$

melynek 2 db egyszeres valós gyöke van: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -1$.

Ennek alapján az $y'' - y' - 2y = 0$ homogén egyenlet alapmegoldásai (az alrendszer):

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

1.4 Kidolgozott példák.

Az 1. példa jobb oldala egy exponenciális függvény, és nincs rezonancia.

1 Példa. Keressük meg az

$$y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$$

differenciálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

A rezonáló gyök: $\lambda = 3$, ami nem gyöke P -nek, tehát $r = 0$ (nincs rezonancia).

$Q(x) = 8$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R(x) = A$ (A jelöli a határozatlan együtthatót).

A próbafüggvény: $y_p = A \cdot e^{3x}$.

$y'_p = 3Ae^{3x}$, $y''_p = 9Ae^{3x}$. Behelyettesítve:

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 8e^{3x}, \quad 4Ae^{3x} = 8e^{3x}, \quad A = 2.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = 2e^{3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

A 2. példa jobb oldala szintén exponenciális függvény, de rezonancia is van.

2 Példa. *Keressük meg az*

$$y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

A rezonáló gyök: $\lambda = 2$, ami 1-szeres gyöke P -nek, tehát $r = 1$ (rezonancia van).

$Q(x) = 9$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R(x) = A$.

A próbafüggvény: $y_p = x \cdot A \cdot e^{2x}$.

$y'_p = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$, $y''_p = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$. Behelyettesítve:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}, \quad 3Ae^{2x} = 9e^{2x}, \quad A = 3.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = 3xe^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

A 3. példa jobb oldala "polinom-szor exponenciális", és nincs rezonancia.

3 Példa. *Keressük meg az*

$$y'' - y' - 2y = 4xe^x$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

A rezonáló gyök: $\lambda = 1$, ami nem gyöke P -nek, tehát $r = 0$ (nincs rezonancia).

$Q(x) = 4x$, ami egy elsőfokú polinom, tehát $N = 1$. Ezért $R(x) = Ax + B$.

A próbafüggvény: $y_p = (Ax + B) \cdot e^x$.

$y'_p = Ae^x + (Ax + B)e^x$, $y''_p = 2Ae^x + (Ax + B)e^x$. Behelyettesítve:

$$2Ae^x + (Ax + B)e^x - Ae^x - (Ax + B)e^x - 2(Ax + B)e^x = 4xe^{2x}.$$

Rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$Ae^x - 2Axe^x - 2Be^x = 4xe^x, \quad A - 2B = 0 \quad -2A = 4, \quad A = -2, \quad B = -1.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = (-2x - 1)e^x$ ($x \in \mathbb{R}$).

A 4. példa jobb oldala szintén "polinom-szor exponenciális", de itt van rezonancia.

4 Példa. Keressük meg az

$$y'' - y' - 2y = (5 - 6x)e^{-x}$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

A rezonáló gyök: $\lambda = -1$, ami gyöke P -nek, tehát $r = 1$ (van rezonancia).

$Q(x) = 5 - 6x$, ami egy elsőfokú polinom, tehát $N = 1$. Ezért $R(x) = Ax + B$.

A próbafüggvény: $y_p = x \cdot (Ax + B) \cdot e^{-x} = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$.

$$y'_p = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x},$$

$$y''_p = 2Ae^{-x} - (2Ax + B)e^{-x} - (2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Behelyettesítés, rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$2A - 3B = 5 \quad -6A = -6, \quad A = 1, \quad B = -1.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = x(x - 1)e^{-x} = (x^2 - x)e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Az 5. példa jobb oldala egy (másodfokú) polinom.

5 Példa. Keressük meg az

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 - 2x - 6$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

Exponenciális szorzó sincs, ami azt jelenti, hogy a rezonáló gyök: $\lambda = 0$. Ez nem gyöke P -nek, tehát $r = 0$ (nincs rezonancia).

$Q(x) = 2x^2 - 2x - 6$, ami egy másodfokú polinom, tehát $N = 2$. Ezért $R(x) = Ax^2 + Bx + C$.

A próbafüggvény: $y_p = Ax^2 + Bx + C$.

$y'_p = 2Ax + B$, $y''_p = 2A$. Behelyettesítve:

$$2A - 2Ax - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 2x - 6.$$

Rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$2A - B - 2C = -6 \quad -2A - 2B = -2 \quad -2A = 2, \quad A = -1, \quad B = 2, \quad C = 1.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = -x^2 + 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

A 6. példában megjelenik a trigonometrikus rész. Mivel a karakterisztikus polinom gyökei valósak, ezért rezonanciás példa nem adható. A jobb oldal egy trigonometrikus függvény.

6 Példa. Keressük meg az

$$y'' - y' - 2y = 130 \cos 3x$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Van trigonometrikus szorzó, $\mu = 3$.

Exponenciális szorzó "nincs", ezért a rezonáló gyök: $\lambda + \mu i = 0 + 3i = 3i$, ami nem gyöke P -nek, tehát $r = 0$ (nincs rezonancia).

$Q(x) = 130$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R_1(x) = A$ és $R_2(x) = B$.

A próbafüggvény: $y_p = A \cos 3x + B \sin 3x$.

$y'_p = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$, $y''_p = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$. Behelyettesítve:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 3A \sin 3x - 3B \cos 3x - 2A \cos 3x - 2B \sin 3x = 130 \cos 3x.$$

Rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$-11B + 3A = 0 \quad -11A - 3B = 130, \quad A = -11, \quad B = -3.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = -11 \cos 3x - 3 \sin 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Figyeljük meg, hogy bár a diff. egyenlet jobb oldalán csak cosinusos tag szerepelt, a megoldásban sinusos és cosinusos tag is van.

A 7. példa jobb oldala "exponenciális-szor trigonometrikus".

7 Példa. Keressük meg az

$$y'' - y' - 2y = -10e^x \sin x$$

differentiálegyenlet egy megoldását.

Megoldás.

Van trigonometrikus szorzó, $\mu = 1$.

Exponenciális szorzó is van ($\lambda = 1$), a rezonáló gyök: $\lambda + \mu i = 1 + i$, ami nem gyöke P -nek, tehát $r = 0$ (nincs rezonancia).

$Q(x) = -10$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R_1(x) = A$ és $R_2(x) = B$.

A próbafüggvény: $y_p = e^x \cdot (A \cos x + B \sin x)$.

$y'_p = e^x((A + B) \cos x + (B - A) \sin x)$, $y''_p = e^x(2B \cos x - 2A \sin x)$. Behelyettesítve:

$$e^x(2B \cos x - 2A \sin x) - e^x((A + B) \cos x + (B - A) \sin x) - 2e^x \cdot (A \cos x + B \sin x) = -10e^x \sin x.$$

Rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$B - 3A = 0 \quad -A - 3B = -10, \quad A = 1, \quad B = 3.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = e^x(\cos x + 3 \sin x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

A befejező három példában tehát a differenciáloperátor nem ugyanaz, mint az eddigi, és az összes megoldást keressük.

Az 8. példa arra mutat rá, hogy a 0-val való rezonanciát nem könnyű észrevenni (u. is "hiányzik" az exponenciális szorzó, melynek kitevőjében van a rezonáló gyök valós része).

8 Példa. Oldjuk meg az

$$y'' - y' = 2x$$

differentiálegyenletet.

Megoldás.

Először a homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom:

$$P(z) = z^2 - z,$$

melynek 2 db egyszeres valós gyöke van: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1$.

Ennek alapján a homogén egyenlet alapmegoldásai (az alaprendszer):

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \quad y_2(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Térjünk rá az inhomogén egyenletre.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

Exponenciális szorzó sincs, ami azt jelenti, hogy a rezonáló gyök: $\lambda = 0$. Ez azonban gyöke P -nek, tehát $r = 1$ (van rezonancia).

$Q(x) = x$, ami egy elsőfokú polinom, tehát $N = 1$. Ezért $R(x) = Ax + B$.

A próbafüggvény: $y_p = x \cdot (Ax + B) \cdot e^{0x} = Ax^2 + Bx$.

$y'_p = 2Ax + B$, $y''_p = 2A$. Behelyettesítve:

$$2A - 2Ax - B = 2x.$$

Együttható-összehasonlítás után:

$$2A - B = 0 \quad -2A = 2, \quad A = -1, \quad B = -2.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = -x^2 - 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

A differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = -x^2 - 2x + c_1 + c_2 e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}).$$

Érdemes kipróbálni, hogy ha nem vesszük észre a rezonanciát, akkor a helytelen $y_p = Ax + B$ próbafüggvényhez jutunk, ami semilyen A, B esetén sem megoldás.

A 9. példában a rezonáló gyök tiszta képzetes szám:

9 Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 4y = 8 \cos 2x$$

differenciálegyenletet.

Megoldás.

Először a homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom:

$$P(z) = z^2 + 4,$$

melynek egy konjugált komplex gyökpárja van: $\lambda_1 = 2i$ és $\lambda_2 = -2i$.

Ennek alapján a homogén egyenlet valós értékű alapmegoldásai (a valós alaprendszer):

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Térjünk rá az inhomogén egyenletre.

Van trigonometrikus szorzó, $\mu = 2$.

Exponenciális szorzó sincs, ami azt jelenti, hogy a rezonáló gyök: $\lambda + \mu i = 0 + 2i = 2i$. Ez gyöke P -nek, tehát $r = 1$ (van rezonancia).

$Q(x) = 8$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R_1(x) = A$, $R_2(x) = B$.

A próbafüggvény: $y_p = x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x)$.

Deriválás, behelyettesítés, és együttható-összehasonlítás után:

$$A = 0, \quad B = 2$$

eredményre jutunk. A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = 2x \sin 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

A differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = 2x \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}).$$

Az utolsó, a 10. példában kétszeres rezonancia van.

10 Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 4y' + 4y = 6 \cdot e^{-2x}$$

differenciálegyenletet.

Megoldás.

Először a homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom:

$$P(z) = z^2 + 4z + 4,$$

melynek 1 db kétszeres valós gyöke van: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Ennek alapján a homogén egyenlet alapmegoldásai (az alaprendszer):

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = x \cdot e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Térjünk rá az inhomogén egyenletre.

Nincs trigonometrikus szorzó, tehát $\mu = 0$.

A rezonáló gyök: $\lambda = -2$. Ez kétszeres gyöke P -nek, tehát $r = 2$ (ún. kétszeres rezonancia van).

$Q(x) = 6$, ami egy 0-adfokú polinom, tehát $N = 0$. Ezért $R(x) = A$.

A próbafüggvény: $y_p = x^2 \cdot A \cdot e^{-2x}$.

$y'_p = (2Ax - 2Ax^2)e^{-2x}$, $y''_p = (2A - 8Ax + 4Ax^2)e^{-2x}$. Behelyettesítve:

$$(2A - 8Ax + 4Ax^2 + 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2)e^{-2x} = 6e^{-2x}.$$

Rendezés és együttható-összehasonlítás után:

$$2A = 6, \quad A = 3.$$

A partikuláris megoldás tehát $y_p(x) = 3x^2 \cdot e^{-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

A differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = 3x^2 e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}).$$

Érdemes kipróbálni, hogy ha nem vesszük figyelembe a kétszeres rezonanciát, akkor az $y_p = Ae^{-2x}$ és az $y_p = Axe^{-2x}$ helytelen próbafüggvények semilyen A esetén sem adnak megoldást.