

$\mathbb{C}$ -ben differenciál

Def: $z_0 \in \text{int } D_f$

f differenciál, ha $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

Isomorfizmus:

~~$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$~~ $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

- egy-egy értéket
- izometria

$$z = x + iy \iff (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$z_1 \iff (x_1, y_1)$$

~~$z_2 \iff (x_2, y_2)$~~

$$|z_1 - z_2| = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

$$\pm T \in \mathbb{R}^2$$

$$\pm K \in \mathbb{R}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \pm T \in \mathbb{R}^2 \\ \pm K \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\} z = x + iy \mapsto w = u + iv$$

~~$w(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$~~

$$f(z) = u(z) + i v(z)$$

$u(z) \in \mathbb{R}$ $v(z) \in \mathbb{R}$ valós értéket vesz fel

~~$f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$~~

$$f \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

$$f \in \mathbb{C} : \longrightarrow (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

⑦ f. konikus alakú egy-egy átképezéssel meghatározott

pl: $f(z) = (z+1)^2$

$$= (x+iy+1)^2 = \underbrace{(x+1)^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{(2y \cdot (x+1))}_{v(x,y)}$$

pl: visszafele

$\left. \begin{matrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{matrix} \right\} \text{adottal} \rightarrow f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) =$

pl

z-vel
kell a
függvény

$$\begin{aligned} x &:= \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y &:= \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

~~diff. és Jacobi mátrix~~

Cauchy-Riemann egyenletek

⑧ Ha $f(z) = u + iv$ u, v hely diff. lehet

Ekkor ekvivalensen a két állítás

① f diff. z-ban

② $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ és $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

kor: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \dots$ stb

(u,v) függvények Jacobi determinánsa, Jacobi mátrixa

$$\begin{pmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

"ahát"

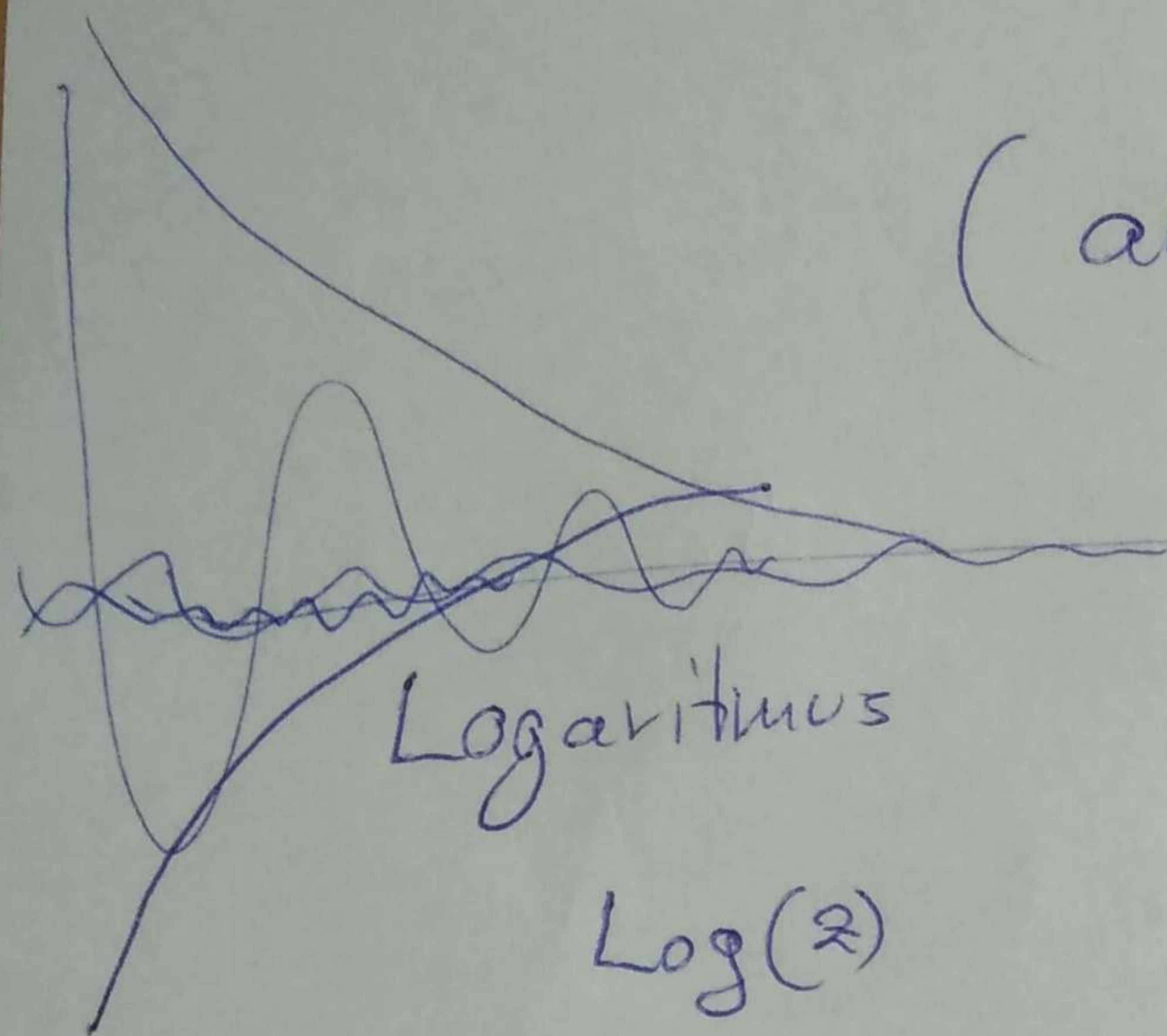
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

e^z analitikus

$$(e^z)' = e^z$$

+ periodikus fgv. $p = 2\pi i$

(abszolút egyértelműség)



$$e^{Ln(z)} = z$$

~~ez az az~~

$$e^{Ln(z)} = z$$

$$z \rightarrow Ln(z) = w$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$w = u + iv$$

$$e^{u+iv} = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$e^u \cdot e^{iv} = \rho \cdot e^{i\theta}$$

$$e^u = \rho$$

$$e^{iv} = e^{i\theta} \Rightarrow v = \theta + 2k\pi$$

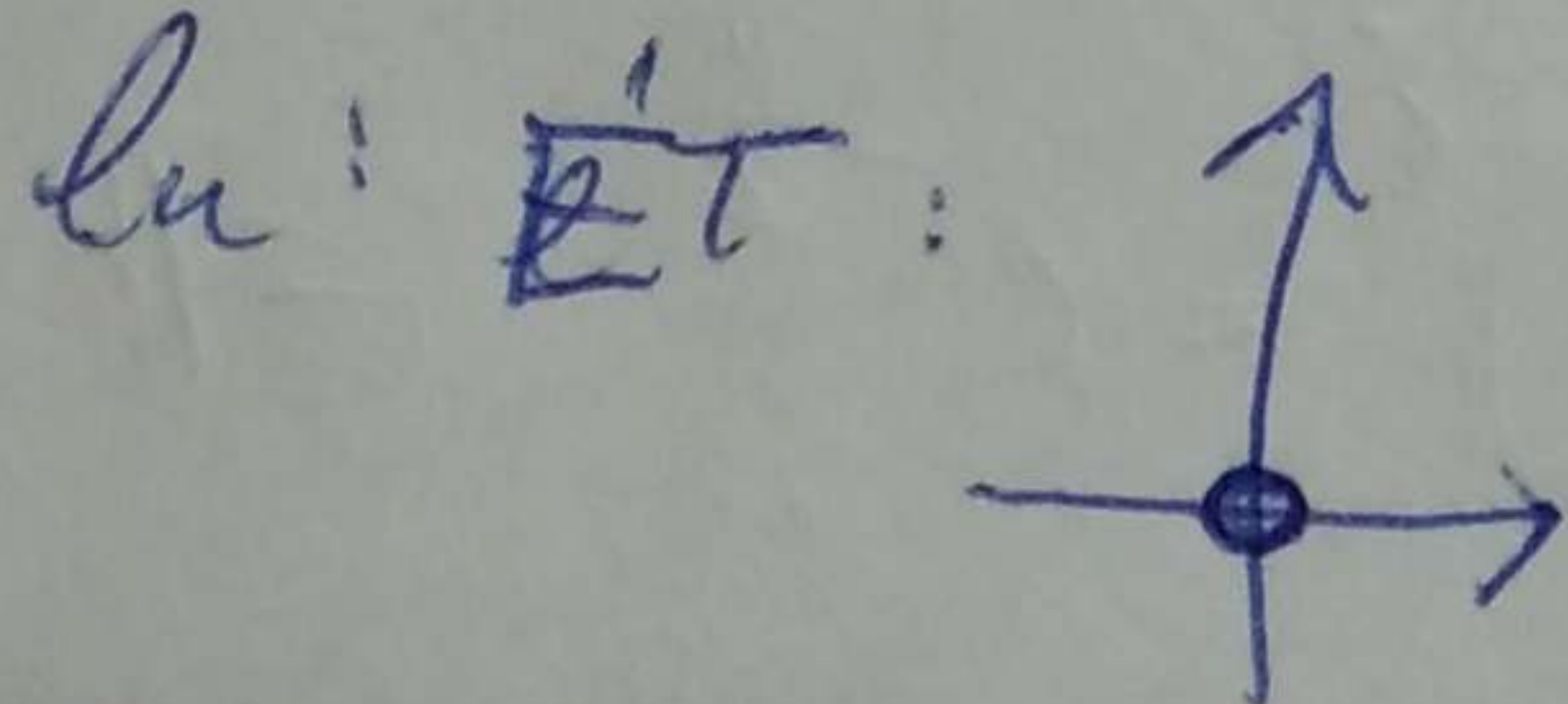
0. eset

θ_p príncipális érték $\theta_p \in [0, 2\pi)$

$$v = \theta_p$$

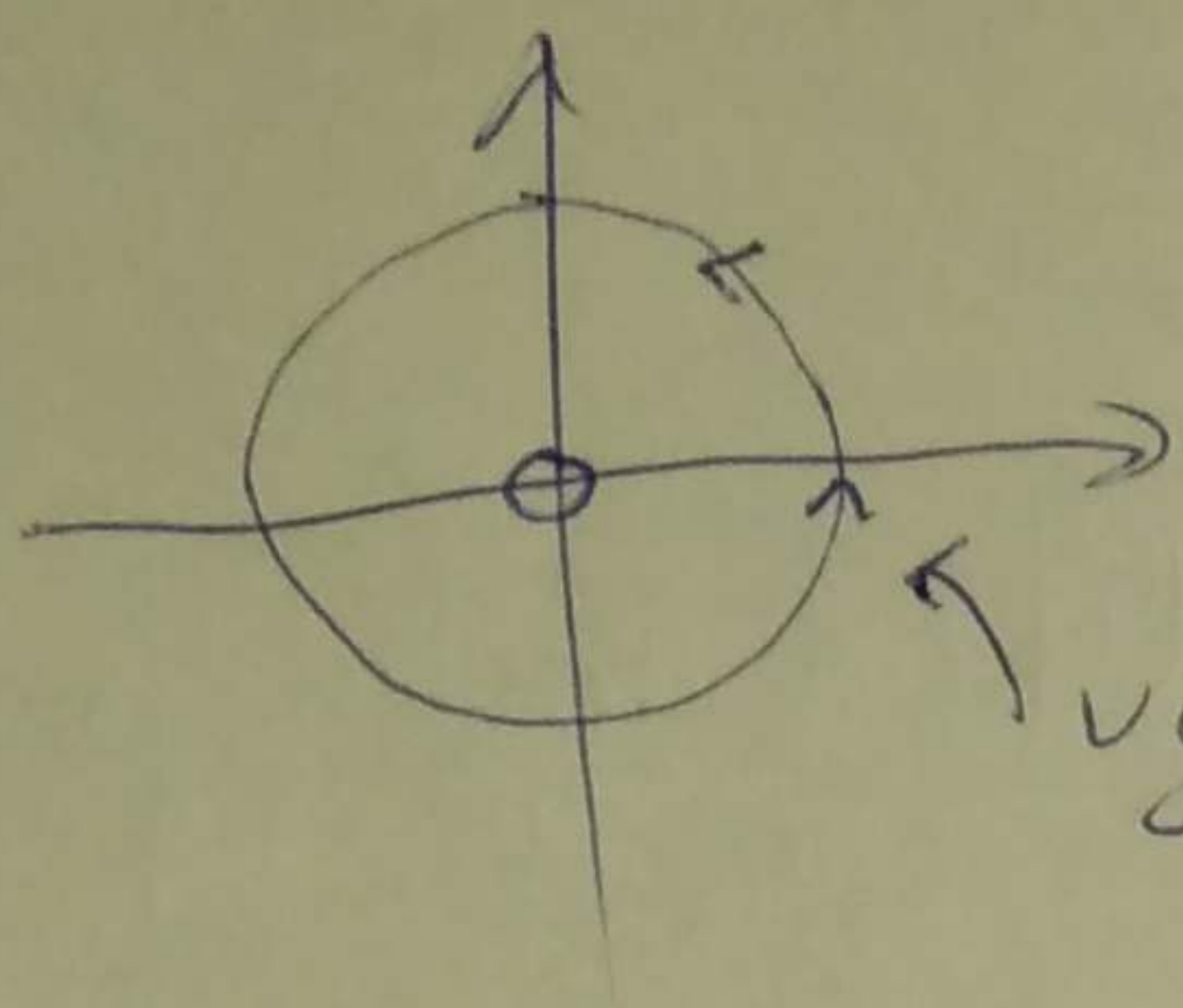
$$u = \ln(\rho) \text{ valós!!!}$$

ha $\rho > 0$!!!

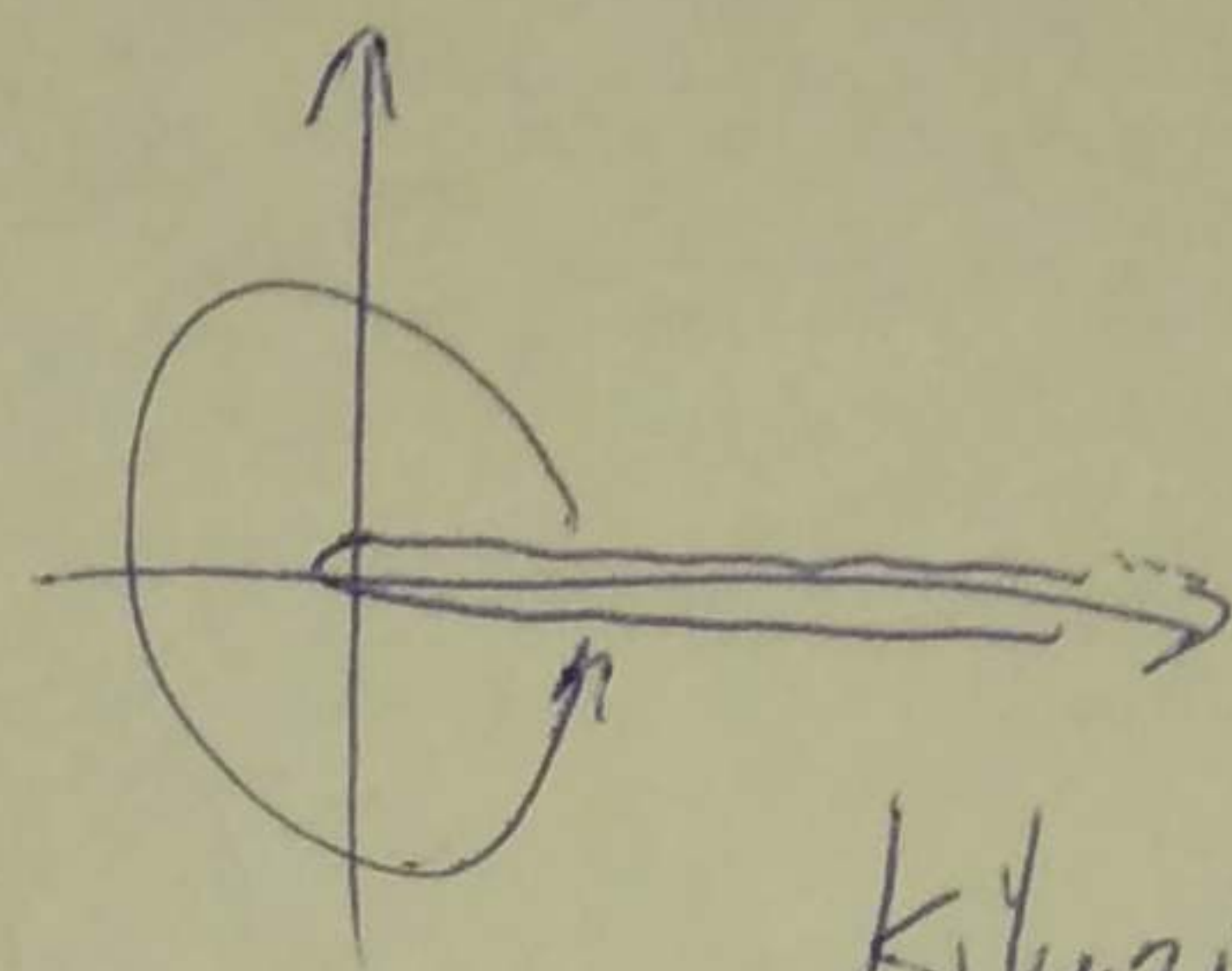


$Ln: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ -ben differenciálható

$$\text{Ln}(z) = \ln|z| + i \arg_p(z)$$



ugrás, anomália érték



kikerül a teljes körrel

Határozás

„Bökebe”

$$z^c = ?$$

$z \in \mathbb{C}$
 $c \in \mathbb{C}$

$$(1) c = n \in \mathbb{N}$$

$$z^n \checkmark$$

$$(2) c = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} \quad \text{a különböző értékek}$$

$$(2)^* c = \frac{k}{n} \quad \text{racionális}$$

„

$$(3) c = c_1 + ic_2$$

„Mészáros”

$$z^{c_1+ic_2} = e^{(c_1+ic_2) \cdot \text{Ln}(z)} = e^{c_1 \cdot \text{Ln}(z)} \cdot e^{ic_2 \cdot \text{Ln}(z)}$$

büntetlenség nem lehetünk az a valószínűség

Nem alakulhat más a valószínűség, mert
nyilvánvalóan mindenki ~~éles~~ élős (12:54)

$$i^i = ?$$

$$e^{i\theta} = \dots$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 = i$$

$$i^{i\pi} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$$

„A” gondolat az érték, hogy az nagyon
komplex

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$