

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Matematika BSc szakosok részére

(2008)

1. A differenciálhatóság és a derivált fogalma

Emlékeztetünk az egyváltozós különbségi hányados fogalmára, melyet a konvex függvények tárgyalása során vezettünk be: ha f valós változós valós értékű függvény és $u \in D(f)$, akkor a $D(f) \setminus \{u\}$ halmazon értelmezett

$$x \mapsto K_u^f(x) := \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

függvényt az f függvény u ponthoz tartozó különbségihányados-függvényének nevezzük.

1.1. Definíció (belső pont). Az u valós számról akkor mondjuk, hogy belső pontja a H számhalmaznak, ha van olyan r pozitív szám, melyre $(u - r, u + r) \subset H$. A H számhalmaz belső pontjainak halmazát az $\text{int } H$ jelsorozattal jelöljük.

1.2. Példa. Könnyen belátható, hogy $\text{int } \mathbf{Q} = \text{int}(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \emptyset$; továbbá, hogy ha I olyan nem-elfajuló intervallum, amelynek bal végpontja α , jobb végpontja β , akkor $\text{int } I = (\alpha, \beta)$.

1.3. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy ha u belső pontja a H számhalmaznak, akkor u torlódási pontja H -nak, sőt a $H \setminus \{u\}$ számhalmaznak is.

1.4. Definíció. Egy G számhalmazról akkor mondjuk, hogy nyílt, ha G minden eleme belső pontja G -nek.

1.5. Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy egy számhalmaz pontosan akkor nyílt, ha unióhalmaza egy páronként diszjunkt nyílt intervallumokból álló megszámlálható halmazrendszernek. Speciálisan persze minden nyílt intervallum is nyílt halmaz.

1.6. Definíció (derivált, differenciálhatóság egy pontban). Ha u belső pontja az f függvény értelmezési tartományának és létezik a

$$\lim_u K_u^f = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

határérték, akkor ezt a határértéket az f függvény u -beli deriváltjának, vagy differenciálhányadosának nevezzük és az $f'(u)$ szimbólummal jelöljük. Ha ráadásul ez a határérték véges, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható (vagy deriválható) az u helyen.

A derivált fogalmának bevezetését elsősorban a fizika és a geometria igényelte. Ezzel kapcsolatban érdemes végiggondolni a következő két megjegyzést.

1.7. Megjegyzés (a derivált geometriai jelentése). Egyszerű ábra készítésével könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a $K_u^f(x)$ szám a függvénygrafikon $(x, f(x))$ és $(u, f(u))$ pontjain áthaladó (szelő) egyenes iránytangensével egyenlő. A függvénygrafikonhoz annak $(u, f(u))$ pontjában húzott érintő egyenesen kézenfekvő azt az egyenest érteni, amely egyrészt áthalad ezen a ponton, másrészt $f'(u) \in \mathbf{R}$ esetén iránytangense $f'(u)$ -vel egyenlő, $f'(u) \notin \mathbf{R}$ esetén pedig az „ y -tengellyel” párhuzamos.

1.8. Megjegyzés (pillanatnyi sebesség, mint derivált). Tegyük fel, hogy egy szabadesést végző tömegpontnak valamely vízszintes síktól számított előjeles távolsága a t időpontban $f(t) := h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ (h adott valós szám). Ennek a tömegpontnak az u és $t (\neq u)$ időpontok által meghatározott időintervallumra vonatkozó (előjeles) átlagsebessége éppen a $K_u^f(t) = -\frac{g}{2} \cdot (t + u)$ számmal egyenlő. A tömegpontnak az u időpontban vett pillanatnyi sebességén kézenfekvő a $\lim_u K_u^f = -g \cdot u = f'(u)$ számot érteni. Hasonló a helyzet általában is akkor, ha a tömegpont egyenesvonalú mozgást végez: azt az egyenest, melyen a mozgását végzi, számegyenesnek képzelve, a tömegpont helye minden egyes t időpontban egyetlen $f(t)$ számmal azonosítható, a $[t, u]$, illetve $[u, t]$ időintervallumra vonatkozó átlagsebességen most is a $K_u^f(t)$ számot, az u időponthoz tartozó pillanatnyi sebességen most is az $f'(u)$ számot értik — feltéve persze, hogy az utóbbi létezik. Ez a gondolatmenet még tovább általánosítható: ha egy fizikai mennyiség időben változik, de minden egyes t időpontban egyetlen $f(t)$ számmal adható meg, akkor e fizikai mennyiség változásának pillanatnyi sebességét hasonlóan értelmezhetjük.

1.9. Példa (a konstans függvények differenciálhatósága). Ha f tetszőleges számhalmazon értelmezett konstans függvény és $u \in \text{int } D(f)$, akkor — lévén a K_u^f függvény azonosan nulla — f differenciálható az u helyen és $f'(u) = 0$.

1.10. Példa (a pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények differenciálhatósága). Bármely n pozitív egész és $u \in \mathbf{R}$ esetén az id^n függvény differenciálható az u helyen és ott a deriváltja $n \cdot u^{n-1}$ -nel egyenlő, hiszen az

$$x \mapsto \frac{x^n - u^n}{x - u} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \cdot u^{n-1-k}$$

különbségihányados-függvény olyan n tagú összeg, amelynek minden egyes tagja tart az u^{n-1} számhoz.

1.11. Példa (az $\exp_c$ és $\log_c$ függvények differenciálhatósága). Az előző fejezet „Néhány nevezetes határérték” című szakaszában bizonyítottak szerint minden 1-től különböző c pozitív szám, minden $a \in \mathbf{R}^+$ és minden $u \in \mathbf{R}$ esetén az $\exp_c$ függvény differenciálható az u helyen, ott a deriváltja $\ln c \cdot c^u$, továbbá a $\log_c$ függvény differenciálható az a helyen és ott a deriváltja $(1/\ln c) \cdot (1/a)$.

1.12. Definíció (bal és jobb oldali derivált, ill. differenciálhatóság). Legyen f valós változós valós értékű függvény és $u \in D(f)$. Ha létezik olyan r pozitív szám, melyre $(u - r, u) \subset D(f)$ [illetve $[u, u + r) \subset D(f)$] és a K_u^f függvénynek van bal [jobb] oldali határértéke az u helyen, akkor azt az f függvény u helyen vett bal [jobb] oldali deriváltjának nevezzük és az $f'_-(u)$ [$f'_+(u)$] szimbólummal jelöljük. Ha az f függvénynek az u helyen van bal [jobb] oldali deriváltja és az véges, akkor azt mondjuk, hogy f balról [jobbról] differenciálható az u helyen.

1.13. Definíció (differenciálható függvény). Ha az f függvény értelmezési tartományának minden pontja belső pont ($D(f) \subset \text{int } D(f)$) és f az értelmezési tartományának minden egyes pontjában differenciálható, akkor f -et röviden differenciálhatónak nevezzük. Ugyancsak differenciálhatónak nevezünk egy intervallumon értelmezett f függvényt abban az esetben is, ha — az intervallum bal végpontját a -val, jobb végpontját b -vel jelölve — f az (a, b) intervallum minden pontjában differenciálható, továbbá $a \in D(f)$ esetén az a pontban jobbról és $b \in D(f)$ esetén az b pontban balról differenciálható.

Egy függvény valamely pontban vett deriváltjának a jelölése azt sugallja, hogy azt egy másik függvénynek az adott pontban vett helyettesítési értékeként szokás felfogni.

1.14. Definíció (derivált függvény). Ha egy f függvény értelmezési tartományának van legalább egy olyan belső pontja, melyben f differenciálható, akkor az összes ilyen pontok H halmazán értelmezhetjük az $f' : H \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, ezt nevezzük az f derivált függvénynek. Hasonlóan értelmezhető a bal oldali és jobb oldali derivált függvény is.

1.15. Tétel (adott pontbeli differenciálhatóság ekvivalens megfogalmazásai). Legyen f egyváltozós valós függvény, $u \in \text{int } D(f)$ és $A \in \mathbf{R}$; ekkor a következő négy kijelentés egymással egyenértékű: 1. f differenciálható az u helyen és $f'(u) = A$,

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - A \cdot (x - u)}{x - u} = 0,$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - A \cdot (x - u)}{|x - u|} = 0,$$

4. van olyan $C_u^f : D(f) \rightarrow \mathbf{R}$ függvény, amely folytonos az u helyen, ott a helyettesítési értéke A , s amelyre minden $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) - f(u) = C_u^f(x) \cdot (x - u).$$

Bizonyítás. Az, hogy a K_u^f különbségihányados-függvény határértéke létezik és A -val egyenlő, egyenértékű azzal, hogy az $x \mapsto K_u^f(x) - A$ függvény határértéke az u helyen 0, hiszen egy y számra vonatkozóan „ $y \in B(A, \varepsilon)$ ” és „ $y - A \in B(0, \varepsilon)$ ” egyaránt azt jelenti, hogy $|y - A| < \varepsilon$. Ezzel az 1. és 2. kijelentések egyenértékűségét igazoltuk.

A 2. és 3. állítások egyenértékűsége abból a két tényből következik, hogy egyrészt egy függvény határértéke valamely u helyen pontosan akkor 0, ha ott az abszolútértékének a határértéke 0 ($|y - 0| = ||y| - 0|$), másrészt a 2.-ben, illetve 3.-ban szereplő függvényeknek ugyanaz az abszolútértéke.

1. $\Rightarrow$ 4. Az előző fejezetnek azt a tételét alkalmazhatjuk, és pedig az $(f, v) := (K_u^f, A)$ pár, amelyik a véges helyen vett véges függvény-határértéket a folytonossággal fogalmazza meg. Ebből azt kapjuk, hogy a K_u^f függvénynek az A $D(f)$ -re való kiterjesztése, amely az u helyen az A értéket veszi fel, folytonos az u helyen. Ez a függvény — és csakis ez — játszhatja C_u^f szerepét.

4. $\Rightarrow$ 1. Az előző fejezet imént idézett tételének ezúttal a másik felét alkalmazhatjuk a különbségihányados-függvényre: az u pontban folytonos kiterjesztés létezéséből következik, hogy létezik a $\lim_u K_u^f$ és egyenlő e kiterjesztésnek az u helyen vett helyettesítési értékével. $\square$

1.16. Megjegyzés. A 4. állításra a továbbiakban mint a differenciálhatóság Carathéodory-féle definíciójára fogunk hivatkozni. A 3. állításnak csak annyi lesz a szerepe, hogy motivációul fog szolgálni a többváltozós függvények differenciálhatósága fogalmának bevezetésénél, míg a 2. állítás csupán arra szolgált, hogy (még) könnyebbé tegye az 1. és 3. állítások egyenértékűségének bizonyítását.

1.17. Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy a tétel – értelemszerű változtatásokkal – átvihető az egy oldali differenciálhatóságra, illetve deriváltra is. Hasonló a helyzet az alábbi tétellel is: a bal [jobb] oldali differenciálhatóságból következik a bal [jobb] oldali folytonosság.

1.18. Tétel (a folytonosság, mint a differenciálhatóság szükséges feltétele). Ha f differenciálható az $u \in \text{int } D(f)$ pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. Felhasználva az előző tétel $1 \Rightarrow 4$. állítását, az f függvény előállítható a konstans — tehát folytonos — $x \mapsto f(u)$, és az u helyen szintén folytonos $x \mapsto C_u^f(x) \cdot (x - u)$ függvény összegeként. $\square$

1.19. Megjegyzés (a folytonosság nem elegendő a differenciálhatósághoz). A tétel megfordítása nem igaz. Például az abszolútérték-függvény folytonos a 0 helyen (miként minden más helyen is, lásd az előző fejezetet), de a 0 ponthoz tartozó különbséghányados-függvényének nincs határértéke a 0 helyen, hiszen ha lenne, akkor az ott a bal és a jobb oldali határértékével is egyenlő lenne, viszont ez az utóbbi két határérték nem egyenlő egymással: az előbbi -1 , az utóbbi $+1$. Megjegyezzük továbbá, hogy ismeretesek példák olyan folytonos $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre is, amelyek egyetlen pontban sem differenciálhatók.

2. Differenciálhatóság és az alapműveletek

2.1. Tétel (az összeg, a különbség és a szorzat differenciálási szabálya). Tegyük fel, hogy a valós változós valós értékű f és g egyváltozós függvények differenciálhatók az u helyen. Ekkor

- I. $f + g$ differenciálható az u helyen és $(f + g)'(u) = f'(u) + g'(u)$,
- II. $f - g$ differenciálható az u helyen és $(f - g)'(u) = f'(u) - g'(u)$,
- III. $f \cdot g$ differenciálható az u helyen és $(f \cdot g)'(u) = f'(u) \cdot g(u) + f(u) \cdot g'(u)$.

Bizonyítás.

Ha az u pont r_f , illetve r_g sugarú környezete része az f , illetve g függvény értelmezési tartományának, akkor a $\min\{r_f, r_g\}$ sugarú környezete része a két értelmezési tartomány metszetének, ami egyenlő az összeg, a különbség és a szorzat értelmezési tartományával. Ezek szerint u az utóbbinak is belső pontja.

Mármint a tétel I. (II.) állítása az összegfüggvény (különbségfüggvény) határértékéről szóló elemi tételből következik, hiszen – amint az a különbséghányados-függvény definíciója alapján könnyen ellenőrizhető – $K_u^{f+g} = K_u^f + K_u^g$ ($K_u^{f-g} = K_u^f - K_u^g$).

III. Minden $x \in D(f) \cap D(g) \setminus \{u\}$ esetén

$$\frac{f(x)g(x) - f(u)g(u)}{x - u} = \frac{f(x)g(x) - f(u)g(x) + f(u)g(x) - f(u)g(u)}{x - u} = \frac{[f(x) - f(u)]g(x) + f(u)[g(x) - g(u)]}{x - u}, \quad (1)$$

vagyis $K_u^{fg} = gK_u^f + f(u)K_u^g$. Ezek után az összeg és a szorzat határértékéről szóló tételekre hivatkozhatunk, hiszen g differenciálható az u pontban, így ott folytonos is és $u \in D(g)'$, ezért $\lim_u g = g(u)$. $\square$

2.2. Tétel (a hányados differenciálási szabálya). Tegyük fel, hogy az f és g függvények differenciálhatók egy olyan u pontban, ahol a g függvény értéke nem nulla. Ekkor f/g is differenciálható az u helyen és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(u) = \frac{f'(u) \cdot g(u) - f(u) \cdot g'(u)}{(g(u))^2}. \quad (2)$$

Bizonyítás. Annak igazolása céljából, hogy $u \in \text{int } D(f/g)$, két szám kisebbikeként nyerhetünk egy az $(u - r, u + r) \subset D(f/g)$ feltételnek eleget tevő r pozitív számot. Abból, hogy f differenciálható az u helyen, adódik egy olyan r_f pozitív szám létezése, melyre $(u - r_f, u + r_f) \subset D(f)$. Másrészt abból, hogy g differenciálható az u helyen, következik, hogy g ott folytonos is, az utóbbiból – lévén $g(u) \neq 0$ – az, hogy g lokálisan előjeltartó az u pontban, ezért van olyan r_g pozitív szám is, melyre minden $x \in B(u, r_g)$ esetén $x \in D(g)$ és $g(x) \neq 0$. Ezek után világos, hogy r_f és r_g kisebbike olyan pozitív szám, amelyet kerestünk. Mármint minden $x \in D(f/g)$ esetén

$$K_u^{f/g}(x) = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(u)}{g(u)}}{x - u} = \frac{g(u)f(x) - f(u)g(x)}{g(x)g(u)(x - u)} =$$

$$\frac{g(u)[f(x) - f(u)] - f(u)[g(x) - g(u)]}{g(x)g(u)(x - u)} = \frac{g(u)K_u^f(x) - f(u)K_u^g(x)}{g(x)g(u)};$$

a differenciálhatósági feltételek miatt $\lim_u K_u^f = f'(u)$, $\lim_u K_u^g = g'(u)$ és $\lim_u g = g(u)$, ezért a függvényhatárérték és az algebrai alapműveletek közti kapcsolatokról szóló elemi tételekből éppen a kívánt eredményt kapjuk. $\square$

2.3. Megjegyzés. Ennek a szakasznak a tételeiből a 1.9, 1.10. Példák felhasználásával adódik, hogy minden racionális törtfüggvény differenciálható.

2.4. Megjegyzés. Az előző két tétel nyilván érvényben marad akkor is, ha differenciálhatóság illetve derivált helyett mindenütt bal [jobb] oldali differenciálhatóságot illetve bal [jobb] oldali deriváltat írunk.

3. A kompozíció és az inverz függvény differenciálhatósága

3.1. Tétel (az összetett függvény differenciálási szabálya). Legyenek f és g valós változós valós értékű függvények. Ha g differenciálható az u helyen és f differenciálható a $v := g(u)$ helyen, akkor $f \circ g$ is differenciálható az u helyen, és $(f \circ g)'(u) = f'(v) \cdot g'(u)$.

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy u belső pontja $f \circ g$ értelmezési tartományának. f differenciálható a v helyen, ezért van olyan ε pozitív szám, melyre $(v - \varepsilon, v + \varepsilon) \subset D(f)$. g differenciálható az u helyen, így ott folytonos is, ezért van olyan r pozitív szám, melyre minden $x \in (u - r, u + r)$ esetén $x \in D(g)$ és $|g(x) - g(u)| < \varepsilon$, ennél fogva minden $x \in (u - r, u + r)$ esetén $x \in D(f \circ g)$.

A differenciálhatóság Carathéodory-féle definícióját fogjuk használni. Ha x a $D(f \circ g)$ halmaz tetszőleges eleme, akkor

$$f(g(x)) - f(g(u)) = C_v^f(g(x))[g(x) - g(u)] = C_v^f(g(x))C_u^g(x)(x - u),$$

tehát ha bevezetjük a $C_u^{f \circ g}(x) := C_v^f(g(x))C_u^g(x)$ definíciót, akkor az 1.15. Tétel alapján erről a $C_u^{f \circ g}$ függvényről két dolgot kell bizonyítani: 1. folytonos az u helyen, 2. helyettesítési értéke az u helyen $f'(v) \cdot g'(u)$. A két állítás közül az előbbinek a bizonyítása céljából a 1.18, 1.15. tételekre kell hivatkoznunk, továbbá a(z egy-egy pontban) folytonos függvények kompozíciójáról, illetve szorzatáról tanultakra, míg az utóbbi a 1.15. tételből következik. $\square$

3.2. Állítás (a hatványfüggvények deriválhatósága a pozitív helyeken). Ha $\alpha \in \mathbf{R}$ és $u \in \mathbf{R}^+$, akkor az id^α függvény differenciálható az u helyen, és ott a deriváltja $\alpha \cdot u^{\alpha-1}$ -nel egyenlő.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a most bizonyított tételt az $f := \exp$, $g(x) := \alpha \cdot \ln x$ szerezposztással: $\text{id}^\alpha = f \circ g$ differenciálható és deriváltja az u helyen $\exp(\alpha \cdot \ln u) \cdot (\alpha/u) = u^\alpha \cdot (\alpha/u) = \alpha \cdot u^{\alpha-1}$. $\square$

3.3. Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy az id^α függvénynek minden nemnegatív α kitevő esetén van deriváltja a 0 helyen is, éspedig $\alpha = 0$ és $\alpha > 1$ esetén 0, $\alpha \in (0, 1)$ esetén $+\infty$, míg $\alpha = 1$ esetén 1.

3.4. Tétel (az inverz függvény deriválási szabálya). Legyen I nemelfajuló intervallum, $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos szigorúan monoton függvény, és tegyük fel, hogy egy $v \in I$ valós számra létezik a $\lim_v K_v^g =: A$ határérték. Ekkor az $f := g^{-1}$ függvény $u := g(v)$ ponthoz tartozó különbséghányadosának is létezik a határértéke az u helyen, éspedig

$$B := \lim_u K_u^f = \begin{cases} \frac{1}{A}, & \text{ha } A \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{ha } A \notin \mathbf{R}, \\ +\infty, & \text{ha } A = 0 \text{ és } g \text{ szigorúan monoton növe}, \\ -\infty, & \text{ha } A = 0 \text{ és } g \text{ szigorúan monoton fogyó}. \end{cases}$$

Ha $v \in \text{int } I$ (következésképp létezik a $g'(v)$ derivált), akkor létezik az $f'(u)$ derivált is, ha v bal végpontja I -nek és g szigorúan növe, vagy v jobb végpontja I -nek és g szigorúan fogyó, akkor $B = f'_+(u)$, ha v jobb végpontja I -nek és g szigorúan növe, vagy v bal végpontja I -nek és g szigorúan fogyó, akkor $B = f'_-(u)$.

Bizonyítás. Bolzano tételének következménye szerint $J := R(g) = D(f)$ is intervallum. Ennek nincs izolált pontja, így az u -beli határérték létezésének kérdése felvethető. f intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény inverze, ezért folytonos, így $u \in J'$ miatt $f(u) = \lim_u f$. És minthogy minden $x \in J \setminus \{u\}$ esetén

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{1}{\frac{x - u}{f(x) - f(u)}} = \frac{1}{\frac{g(f(x)) - g(f(u))}{f(x) - f(u)}} = \frac{1}{K_v^g(f(x))},$$

azaz $K_u^f = (1/K_v^g) \circ f$, továbbá f – a szigorú monotonitása miatt – csak a v helyen veszi fel az u értéket, a kompozíció határértékéről szóló második tételünk szerint elég azt bizonyítani, hogy az $1/K_v^g$ függvény határértéke a v helyen a négy esetben rendre $1/A$, 0 , $+\infty$, illetve $-\infty$. E négy állítás közül az első közvetlenül a reciprokok határértékéről szóló tételből következik. A második, a harmadik és a negyedik állítás bizonyítása céljából csupán azt kell meggondolnunk, hogy egyrészt a K_v^g függvény minden értéke növe g esetén pozitív, csökkenő g esetén negatív, másrészt növekedő g függvény esetében a $0 < 1/K_v^g(y) < \varepsilon$ egyenlőtlenség-pár egyenértékű az $1/\varepsilon < K_v^g(y)$ egyenlőtlenséggel, fogyó g esetén a $-\varepsilon < 1/K_v^g(y) < 0$ egyenlőtlenség-pár azzal, hogy $K_v^g(y) < -1/\varepsilon$.

A kiegészítő állítások abból következnek, hogy szigorúan monoton növe/fogyó függvény az értelmezési tartomány legkisebb elemét az értékkészlet legkisebb/legnagyobb elemébe, az értelmezési tartomány legnagyobb elemét pedig az értékkészlet legnagyobb/legkisebb elemébe viszi, s ha ráadásul a függvény intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor az értékkészlet is intervallum. A $v \in \text{int } I$ esetben ezeket g két leszűkítésére kell alkalmazni (annak bizonyítása céljából, hogy u is belső pontja J -nek), a leszűkítések értelmezési tartománya $I \cap (-\infty, v]$, illetve $I \cap [v, +\infty)$, a többi esetben magára a g függvényre (annak bizonyítása céljából, hogy u bal, illetve jobb végpontja a J intervallumnak). $\square$

3.5. Tétel (a hiperbolikus függvények deriváltjai). *A hiperbolikus függvények differenciálhatók; minden $u \in \mathbf{R}$ esetén I. $\text{sh}'(u) = \text{ch } u$, II. $\text{ch}'(u) = \text{sh } u$, III. $\text{th}'(u) = 1/\text{ch}^2 u$; IV. minden 0-tól különböző $u \in \mathbf{R}$ esetén $\text{cth}'(u) = -1/\text{sh}^2 u$.*

Bizonyítás. A 3.1. Tétel szerint az $x \mapsto e^{-x}$ függvény differenciálható és a deriváltja az u helyen $-e^{-u}$. Ebből, a 2.1. Tételből, és az $\exp'(u) = e^u$ egyenlőségből következik az I. és a II. állítás. Az utóbbiakból III. és IV. úgy következik, hogy először alkalmazzuk az (sh, ch) , illetve a (ch, sh) függvénypárra a hányados differenciálhatóságáról szóló tételt, majd az így nyert formula egyszerűbbé tétele céljából a $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ azonosságot. $\square$

Eltekintve attól, hogy az arch függvény az 1 helyen nem differenciálható, a hiperbolikus függvények inverze is differenciálható az értelmezési tartományuk minden egyes pontjában:

3.6. Tétel (az „area” függvények deriváltjai). *I. Minden valós u és minden 1-nél nagyobb x esetén*

$$\text{arsh}'(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \text{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

II. $\text{arch}'_+(1) = +\infty$, III. minden $u \in (-1, 1)$ és minden $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$ esetén

$$\text{arth}'(u) = \frac{1}{1-u^2}, \quad \text{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Bizonyítás. A 3.4. Tételt alkalmazzuk, és pedig egymás után ötször.

I. Először a $g := \text{sh}$, $v := \text{arsh } u$ szereposztással:

$$\frac{1}{\text{arsh}'(u)} = \text{ch}(\text{arsh } u) = \sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{arsh } u)} = \sqrt{1 + u^2},$$

majd térjünk át reciprokokra; másodszor a $g := \text{ch}|_{[1, +\infty)}$, $v := \text{arch } x$ szereposztással:

$$\frac{1}{\text{arch}'(x)} = \text{sh}(\text{arch } x) = \sqrt{\text{ch}^2(\text{arch } x) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

II. Harmadszor a $g := \text{ch}|_{[1, +\infty)}$, $v := 0$ szereposztással (most a g szigorúan monoton növe és $g'(v) = 0$).

III. Negyedszer legyen $g := \text{th}$ és $v := \text{arth } u$:

$$\frac{1}{\text{arth}'(u)} = \frac{1}{\text{ch}^2}(\text{arth } u) = 1 - \text{th}^2(\text{arth } u) = 1 - u^2,$$

az utolsó előtti egyenlőséget úgy kaptuk, hogy a $\text{ch}^2 v - \text{sh}^2 v = 1$ egyenletből kifejeztük $1/\text{ch}^2 v$ -t.

Végül legyen $g := \text{cth}$ és $v := \text{arcth } u$:

$$\frac{1}{\text{arcth}'(u)} = -\frac{1}{\text{sh}^2}(\text{arcth } u) = 1 - \text{cth}^2(\text{arcth } u) = 1 - u^2,$$

ezúttal a $\text{ch}^2 v - \text{sh}^2 v = 1$ egyenletből nem az $1/\text{ch}^2 v$ -t, hanem a $-1/\text{sh}^2 v$ -t fejeztük ki. $\square$

4. Pontbeli (szigorú) növekedés és fogyás, a szélsőérték szükséges feltétele

A következő fogalmakat elsősorban azért vezetjük be, hogy a differenciálható függvények monotonitásának vizsgálata során tegyenek jó szolgálatot.

4.1. Definíció (Adott pontbeli (szigorú) növekedés és fogyás). Legyen f egyváltozós valós függvény és $u \in D(f) \cap D(f)'$. Azt mondjuk, hogy f az u pontban a) növő, b) fogyó, c) szigorúan növő, d) szigorúan fogyó, ha van olyan δ pozitív szám, amelyre minden $x \in D(f) \cap \dot{B}(u, \delta)$ esetén a $K_u^f(x)$ helyettesítési érték a) nemnegatív, b) nempozitív, c) pozitív, d) negatív.

4.2. Megjegyzés. A szorzás, illetve osztás előjelszabályaiból következik, hogy az iménti definícióban a δ számra vonatkozóan megfogalmazott feltétel egyenértékű azzal, hogy minden olyan u -nál kisebb x és u -nál nagyobb y számra, amelyek benne vannak a $D(f) \cap \dot{B}(u, \delta)$ halmazban, teljesülnek az a) esetben az $f(x) \leq f(u) \leq f(y)$, a b) esetben az $f(x) \geq f(u) \geq f(y)$, a c) esetben az $f(x) < f(u) < f(y)$, végül a d) esetben az $f(x) > f(u) > f(y)$ egyenlőtlenségek. Hasonlóképpen világos, hogy ha f monoton növő, monoton fogyó, szigorúan monoton növő, illetve szigorúan monoton fogyó, akkor minden egyes $u \in D(f) \cap D(f)'$ pontban is növő, fogyó, szigorúan növő, illetve szigorúan fogyó. Viszont abból, hogy egy f függvény egy u pontban szigorúan növő, nem következik, hogy volna az u pontnak olyan K környezete, amelyre az $f|_K$ függvény monoton volna. Legyen például $u := 0$ és f az a függvény, amely a 0-hoz a 0-tól különböző x számokhoz az $x \cdot (2 + \sin \frac{1}{x})$ számot rendeli. Könnyen belátható, hogy ez a függvény a 0 pontban lokálisan növő. Azt, hogy ez a függvény a 0 szám egyetlen környezetében sem monoton növő, a következő szakasz egyik tételének felhasználásával lehet igazolni: például azt lehet igazolni, hogy minden pozitív egész n esetén megadható olyan δ_n pozitív szám, hogy az $x_n := 1/(2n\pi)$ szám δ_n sugarú környezetében minden x -re $f'(x) < 0$, s emiatt az f függvénynek a $B(x_n, \delta_n)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó. Egyszerűbb ellenpélda: $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(0) := 0$, minden $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ esetén $f(x) := \text{ctg } x$.

4.3. Tétel (differenciálható függvény pontbeli növekedésének/fogyásának a feltételei). Legyen f valós változós valós értékű függvény, $u \in D(f) \cap D(f)'$, és tegyük fel, hogy létezik a $\lim_u K_u^f =: A$ határérték. I. Ha f az u pontban növő [fogyó], akkor $A \geq 0$ [$A \leq 0$]; II. ha $A > 0$ [$A < 0$], akkor f az u pontban szigorúan növő [fogyó].

Bizonyítás. Mind a négy állítás közvetlen következménye a függvényhatárérték és rendezés kapcsolatairól szóló tételnek. $\square$

4.4. Definíció (lokális, illetve abszolút szélsőértékek). Legyen f egyváltozós valós függvény és $u \in D(f)$. Az a kijelentés, hogy az f függvénynek az u helyen lokális minimuma [maximuma] van, a következőt jelenti: van olyan δ pozitív szám, melyre minden $x \in D(f) \cap B(u, \delta)$ esetén $f(x) \geq f(u)$ [$f(x) \leq f(u)$]. Az a kijelentés, hogy f -nek az u helyen abszolút minimuma [maximuma] van, azt jelenti, hogy minden $x \in D(f)$ esetén $f(x) \geq f(u)$ [$f(x) \leq f(u)$]. Az a kijelentés, hogy az f függvénynek az u helyen abszolút [lokális] szélsőértéke van, azt jelenti, hogy f -nek az u helyen abszolút [lokális] minimuma, vagy maximuma van. Ha a lokális minimum [maximum] definíciójában $B(u, \delta)$ helyett $\dot{B}(u, \delta)$ -t és a $\geq$ helyett a $>$ jelet [$\leq$ helyett a $<$ jelet] írjuk, akkor kapjuk a szigorú lokális minimum [maximum] definícióját. Hasonló értelemben élesíthető az abszolút minimum [maximum] fogalma is: a szigorú abszolút minimum [maximum] definíciójában is kizárjuk az $f(x) = f(u)$ egyenlőség teljesülését az u -tól különböző x -ekre.

4.5. Megjegyzés. Sokan vannak, akik a lokális szélsőérték definíciójában megkövetelik az $u \in \text{int } D(f)$ feltétel teljesülését is.

4.6. Tétel (a lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele). Ha az f függvénynek lokális szélsőértéke van egy olyan u pontban, ahol f -nek van deriváltja, akkor $f'(u) = 0$.

Bizonyítás. Ha $f'(u) \neq 0$ volna, akkor az előző tétel II. állítása szerint f az u pontban szigorúan növő, vagy fogyó volna, de akkor – minthogy $f'(u)$ létezése miatt $u \in \text{int } D(f)$, – f az u pont minden egyes környezetében felvenne $f(u)$ -nál kisebb, és $f(u)$ -nál nagyobb értékeket is. $\square$

A legutóbb bizonyított tételben a lokális szélsőértéknek valóban csak szükséges feltételét adtuk, másszóval az $f'(u) = 0$ feltétel valóban nem elegendő ahhoz, hogy f -nek az u helyen lokális szélsőértéke legyen. Egyszerű ellenpélda: $f := \text{id}^3$, $u = 0$.

Ráadásul léteznek olyan differenciálható $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvények is, amelyeknek a deriváltja például az $u = 0$ helyen nulla, de a 0 pont nem lokális szélsőérték helye sem az $f|_{(-\infty, 0]}$, sem az $f|_{[0, +\infty)}$ leszűkítésnek. Egy ilyen függvény például az, amelyik a nullához a nullát, tetszőleges nullától különböző x valós számhoz pedig az $x^2 \cdot \sin(1/x)$ -t rendeli hozzá.

5. Intervallumon értelmezett (szigorúan) monoton függvények

Az előző szakaszban mondtak ellenére van olyan szituáció, amikor pontbeli növekedési (fogyási) feltétel teljesüléséből lehet (globális) monotonitásra következtetni:

5.1. Tétel. *Ha J nemelfajuló intervallum és az $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ függvény a J intervallum minden egyes pontjában*

- a) növe, akkor f monoton növe,*
- b) fogyó, akkor f monoton fogyó,*
- c) szigorúan növe, akkor f szigorúan monoton növe,*
- d) szigorúan fogyó, akkor f szigorúan monoton fogyó.*

Bizonyítás. A c) állítást igazoljuk, a többi teljesen hasonlóan bizonyítható. Tekintsük a J intervallum tetszőleges két különböző elemét, jelöljük a kisebbiket a -val, a nagyobbikat b -vel, igazoljuk, hogy $f(b) - f(a) > 0$. Álljon H az $(a, b]$ intervallumnak azokból az y elemeiből, amelyekre minden $x \in (a, y]$ esetén $f(x) - f(a) > 0$, azt kell igazolnunk, hogy $b \in H$. Az a pontbeli szigorú növekedés definíciójából következik, hogy ez a H halmaz tartalmazza az a pont egy pontozott jobb oldali környezetének minden elemét, tehát nemüres. H definíciója szerint b felső korlátja H -nak, így $\beta := \sup H \in (a, b]$. $\beta \in H$, ugyanis az $f(x) - f(a) > 0$ egyenlőtlenség $x \in (a, \beta)$ esetén abból következik, hogy $-$ a felső határ definíciója szerint $-$ az x -nél nagyobb számok között található H -beli elem ($a < x < y \in H \Rightarrow f(x) - f(a) > 0$), $x = \beta$ esetén pedig abból, hogy $-$ lévén f a β pontban szigorúan növe $-$ valamely $\delta > 0$ mellett f a $(\beta - \delta, \beta)$ intervallumon mindenütt $f(\beta)$ -nál kisebb értéket vesz fel, de ha β nem volna H -ban, akkor ebben az intervallumban kellene lennie H -beli elemnek. Végül igazoljuk, hogy β nem lehet kisebb mint b , vagyis csakis $\beta = b$ lehet. Valóban, ha $\beta < b$ lenne, akkor ismét vehetnénk egy olyan δ pozitív számot, mint az imént, s ebből azt kapnánk, hogy $(\beta, \beta + \delta) \subset H$, vagyis azt kapnánk, hogy H felső határa határozottan nagyobb lenne, mint β . $\square$

Szükségünk lesz a most bizonyított tétel alábbi variánsára is:

5.2. Tétel. *Legyen J nemelfajuló és nem nyílt intervallum, $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ a J -hez tartozó végpontban illetve végpontokban folytonos függvény. Ha f az int J intervallum minden egyes pontjában*

- a) növe, akkor f monoton növe,*
- b) fogyó, akkor f monoton fogyó,*
- c) szigorúan növe, akkor f szigorúan monoton növe,*
- d) szigorúan fogyó, akkor f szigorúan monoton fogyó.*

Bizonyítás. Ismét csak a c) állítást igazoljuk, a többi hasonlóan bizonyítható. Az előző tétel szerint $f|_{\text{int } J}$ szigorúan monoton növe, így elég azt igazolni, hogy ha $\inf J = \min J =: a$, akkor minden $x \in \text{int } J$ esetén $f(a) < f(x)$, továbbá ha $\sup J = \max J =: b$, akkor minden $x \in \text{int } J$ esetén $f(x) < f(b)$. Az utóbbi két állítás közül ismét elég az első bizonyítani, mert a másik hasonlóan intézhető el. Az $f|_{\text{int } J}$ függvény monoton növe volta miatt e függvénynek van az a helyen jobb oldali határértéke és ez egyenlő e függvény értékészletének alsó határával. Ennek a határértéknek meg kell egyeznie az f függvény a -beli jobb oldali határértékével, ami az f a -beli folytonossága miatt $f(a)$ -val is egyenlő. Ezek szerint minden $x \in \text{int } J$ esetén $f(a) \leq f(x)$. Ha volna olyan $y \in \text{int } J$, melyre $f(a) = f(y)$, akkor $f|_{\text{int } J}$ szigorú monoton növe volta miatt az a és y közötti x számok a J intervallumnak olyan belső pontjai lennének, melyekre $f(x) < f(a) = f(y)$ teljesülne, ami ellentmondana az előző mondatban mondottaknak. $\square$

A pontbeli szigorú növekedés [fogyás] elégséges feltételéből (4.3.II.) és a most bizonyított tételből nyomban következik az alábbi állítás:

5.3. Tétel (elégséges feltétel differenciálható függvény szigorú monotonitására). *Ha J nemelfajuló intervallum, $f \in C(J)$ -nek J minden belső pontjában van deriváltja és ez minden belső pontban pozitív [negatív], akkor f szigorúan monoton növe [fogyó].*

5.4. Tétel (a differenciálható monoton függvények jellemzése). *Legyen J nemelfajuló intervallum, $f \in C(J)$, és tegyük fel, hogy f -nek int J minden pontjában van deriváltja. Ekkor a következő két kijelentés egymással egyenértékű: 1. f monoton növe [fogyó], 2. minden $x \in \text{int } J$ esetén $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$].*

Bizonyítás. $1. \Rightarrow 2.$ Ez a 4.3. Tételből és az azt megelőző Megjegyzés első mondatából következik.

$2. \Rightarrow 1.$ Indirekt úton okoskodunk, csak a monoton növe esetet részletezzük. Ha volna olyan $a \in J$ és olyan a -nál nagyobb $b \in J$, melyekre $f(b) < f(a)$ volna, akkor bevezetve a

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} \cdot (x - a)$$

függvényt, ez folytonos volna, (a, b) minden pontjában létezne deriváltja és minden

$$x \in (a, b) \quad \text{esetén} \quad g'(x) = f'(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} > 0$$

volna (erre $f'(x) = +\infty$ esetén is lehet következtetni például abból, hogy a K_x^g függvény a K_x^f függvénynek és a konstans $\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$ függvénynek az összege), erre a függvényre tehát alkalmazható volna az előző tétel, így ez a függvény szigorúan monoton növekvő volna, ami ellentmond annak, hogy $g(a) = g(b) = f(a)$. $\square$

5.5. Tétel (a konstans függvények jellemzése). Legyen J nemelfajuló intervallum és $f : J \rightarrow \mathbf{R}$. Ekkor a következő két állítás egymással egyenértékű: 1. f konstans, 2. $f \in C(J)$, $\text{int}(J)$ minden pontjában van deriváltja és minden $x \in \text{int}(J)$ esetén $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. Az $1. \Rightarrow 2.$ állítás a korábban tett megjegyzéseinkből, vagy akár a derivált definíciójából is könnyen következik.

$2. \Rightarrow 1.$ Az előző tétel szerint f monoton növekvő és monoton fogyó, tehát konstans. $\square$

5.6. Tétel (a differenciálható szigorúan monoton függvények jellemzése). Legyen J nemelfajuló intervallum, $f \in C(J)$ és $f|_{\text{int}(J)}$ differenciálható. Ekkor a következő két állítás egymással egyenértékű: 1. f szigorúan monoton növekvő [fogyó], 2. minden $x \in \text{int}(J)$ esetén létezik az $f'(x)$ és az nemnegatív [nempozitív], továbbá nincs olyan $(a, b) \subset J$ intervallum, melyre minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) = 0$ volna.

Bizonyítás. Ismét csak a szigorúan monoton növekvő esetet részletezzük.

$1. \Rightarrow 2.$ Láttuk (5.4.), hogy már a monoton növekedésből is következik a deriváltak nemnegativitása. Ha lenne olyan $(a, b) \subset J$, melynek minden egyes x pontjára $f'(x) = 0$ teljesülne, akkor az előző tétel szerint f egy ilyen intervallumon konstans volna, ami ellentmond a szigorú monotonitásnak.

$2. \Rightarrow 1.$ Ismét az 5.4. Tételből következik, hogy f monoton növekvő. Ha nem lenne szigorúan növekvő, akkor lenne J -ben olyan a és b , melyekre $a < b$ és $f(a) = f(b)$ teljesülne, sőt (a monoton növekedést ismét kihasználva) f az (a, b) intervallumon konstans volna, következésképpen (5.5.) minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) = 0$ volna. $\square$

5.7. Tétel (az abszolút szélsőérték elsőrendű elégséges feltétele). Legyen I nemelfajuló intervallum, $u \in \text{int}(I) = (a, b)$, $f \in C(I)$, f -nek van deriváltja az $(a, b) \setminus \{u\}$ halmaz minden pontjában, végül minden $x \in (a, u)$ esetén $f'(x) \leq 0$ [$f'(x) \geq 0$] és minden $x \in (u, b)$ esetén $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$]. Ekkor az f függvénynek az u helyen abszolút minimuma [maximuma] van.

Bizonyítás. Ismét csak az első változatot részletezzük: A 5.4. Tétel szerint f -nek a $J \cap (-\infty, u]$ intervallumra való leszűkítése monoton fogyó, a $J \cap [u, +\infty)$ intervallumra való leszűkítése pedig monoton növekvő, így minden $x \in J$ esetén $f(u) \leq f(x)$. $\square$

6. Középértéktételek I.

6.1. Tétel (Darboux tételének speciális esete). Ha $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható és $g'_+(a) < 0 < g'_-(b)$, akkor van olyan $u \in (a, b)$, amelyre $g'(u) = 0$.

Bizonyítás. g differenciálható, ezért folytonos is az $[a, b]$ intervallumon, így Weierstrass tétele szerint van legkisebb értéke. Sem $g(a)$, sem $g(b)$ nem lehet g legkisebb értéke; $g(a)$ azért nem lehet, mert $g'_+(a) < 0$ miatt g az a pontban lokálisan szigorúan fogyó, $g(b)$ azért nem lehet, mert $g'_-(b) > 0$ miatt g az b helyen lokálisan szigorúan növekvő. Így tehát az $(a, b) = \text{int}[a, b]$ intervallumban található olyan u szám, melyre $g(u)$ a g függvény legkisebb értéke. A (lokális) szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele (4.6.) szerint minden ilyen u kielégíti a $g'(u) = 0$ egyenletet. $\square$

6.2. Tétel (Darboux tétele). Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ differenciálható függvényre és az y valós számra teljesülnek vagy az $f'_+(a) < y < f'_-(b)$, vagy az $f'_-(b) < y < f'_+(a)$ egyenlőtlenségek, akkor található olyan $u \in (a, b)$, melyre $f'(u) = y$.

Bizonyítás. Értelmezzük a $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt az első egyenlőtlenség-pár teljesülése esetén az $x \mapsto f(x) - y \cdot x$, a másik esetben az $x \mapsto y \cdot x - f(x)$ hozzárendeléssel. g is differenciálható, hiszen két ilyen függvény összege, $g'(x)$ az első esetben minden $x \in [a, b]$ esetén az $f'(x) - y$, a második esetben az $y - f'(x)$ számmal egyenlő. Ezek szerint az f -re és y -ra vonatkozó feltételekből következnek az $g'_+(a) < 0 < g'_-(b)$ egyenlőtlenségek, míg a bizonyítandó állítás egyenértékű azzal, hogy a $g'(u) = 0$ egyenletnek létezik $u \in (a, b)$ megoldása, így tételünk az előző tétel következménye. $\square$

6.3. Lemma. *Ha egy nyílt intervallumon értelmezett differenciálható függvény deriváltja egyetlen pontban sem nulla, akkor ez a függvény szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy a derivált vagy minden pontban negatív, vagy minden pontban pozitív (5.3). Ez azért van így, mert a logikailag elképzelhető harmadik eset, hogy tudniillik olyan pont is van, ahol a derivált negatív, meg olyan is, amelyben a derivált pozitív, Darboux tétele szerint nem következhet be: ha ugyanis létezne az intervallumban két ilyen szám, a kisebbiket a -val, nagyobbikat b -vel jelölve, a függvényünknek az $[a, b]$ intervallumra való leszűkítésére lehetne alkalmazni Darboux tételét, s azt kapnánk, hogy a derivált értéke valahol mégis nulla lenne. $\square$

6.4. Tétel (általánosított Rolle-tétel). *Ha egy nyílt intervallumon értelmezett differenciálható függvénynek az intervallum mindkét végpontjában van határértéke és ezek a határértékek egyenlők egymással, akkor a függvény deriváltja az intervallum legalább egy pontjában nulla.*

Bizonyítás. Indirekt úton okoskodunk. Ha a derivált értéke egyetlen pontban sem volna nulla, akkor az imént bizonyított lemma szerint függvényünk szigorúan monoton lenne. A monotonitásból következik az, hogy a két végpontbeli határérték a függvény értékkészletének alsó, illetve felső határa, viszont a szigorú monotonitás miatt függvényünk nem konstans, így értékkészletének alsó határa nem lehet egyenlő a felső határával. $\square$

6.5. Tétel (Rolle tétele). *Ha egy zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény az intervallum végpontjaiban azonos értékeket vesz fel, és az intervallum belső pontjaiban differenciálható, akkor deriváltjának értéke legalább egy belső pontban nulla.*

Bizonyítás. Szűkítsük le függvényünket az intervallum belső pontjainak halmazára. Erre a leszűkített függvényre alkalmazható az előző tétel, hiszen egyrészt a végpontokban fennálló folytonosság miatt ott létezik a határérték is, és az egyenlő a helyettesítési értékkel, másrészt az eredeti függvény határértékének létezése és valamely A számmal való egyenlősége is egyenértékű a leszűkített függvény határértékének létezésével és az A számmal való megegyezésével, meg a belső pontokban feltételezett differenciálhatóság is egyenértékű a leszűkített függvény differenciálhatóságával. Ha a leszűkített függvény deriváltja egy pontban nulla, akkor ott az eredeti függvényé is nulla. $\square$

6.6. Tétel (a Lagrange-féle középértéktétel). *Ha az $f \in C[a, b]$ függvény differenciálható a nyílt (a, b) intervallum minden egyes pontjában, akkor van olyan $w \in (a, b)$, melyre $f'(w)$ egyenlő a $z := [f(b) - f(a)]/(b - a)$ hányadossal.*

Bizonyítás. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto f(x) - f(a) - z \cdot (x - a) =: \varphi(x)$ függvényre alkalmazható Rolle tétele, hiszen ez a függvény (a, b) pontjaiban differenciálható, a két végpontban folytonos (az f függvény is ilyen, a polinomfüggvények is ilyenek, továbbá két ilyen függvény összege is ilyen) és mindkét végpontban a 0 értéket veszi fel. Rolle tétele szerint tehát van az (a, b) intervallumban olyan w szám, amelyre $0 = \varphi'(w) = f'(w) - z$. $\square$

6.7. Megjegyzés. *A most bizonyított tétel állításának szemléletes tartalma: a függvény grafikonjának van olyan érintője, amely párhuzamos a grafikon két végpontján áthaladó (szelő) egyenessel.*

6.8. Megjegyzés. *Evidens, hogy az alábbi tételből speciális esetként adódik a Lagrange-féle középértéktétel ($g := \text{id}$), a Lagrange-féle középértéktételből pedig Rolle tétele.*

6.9. Tétel (a Cauchy-féle középértéktétel). *Ha mind az f , mind a g függvény az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos, a belső pontokban differenciálható függvény, továbbá minden egyes $x \in (a, b)$ esetén $g'(x) \neq 0$, akkor*

I. $g(b) - g(a) \neq 0$, II. van olyan $v \in (a, b)$, amelyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(v)}{g'(v)}.$$

Bizonyítás. I. Ha $g(b) = g(a)$ volna, akkor Rolle tétele szerint volna olyan $x \in (a, b)$, amelyre $g'(x) = 0$ volna.

II. A bizonyítandó egyenlőséget a nevezőkkel való átszorozás, majd egy oldalra rendezés után

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(v) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(v) = 0$$

alakra hozhatjuk, ez adhatja azt az ötletet, hogy vezessük be a

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R} \quad x \mapsto (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$$

függvényt, és próbáljuk erre alkalmazni Rolle tételét. A valamely pontban folytonos, illetve differenciálható függvények konstansszorosra is, összege is folytonos, illetve differenciálható ugyanebben a pontban, ezért $h \in C[a, b]$, h differenciálható a nyílt (a, b) intervallum pontjaiban és minden $x \in (a, b)$ esetén

$$h'(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(x),$$

vagyis olyan (a, b) -beli w szám létezését kell bizonyítanunk, amelyre $h'(w) = 0$. Ez valóban következik Rolle tételéből, hiszen — amint az egyszerű számolással ellenőrizhető — $h(b) = h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. $\square$

Ha az iménti bizonyításban a b -beli, illetve a -beli helyettesítési értékeket az ottani határértékekkel helyettesítjük, és Rolle tétele helyett az általánosított Rolle-tételre hivatkozunk, akkor éppen az alábbi tétel bizonyítását kapjuk:

6.10. Tétel (az általánosított Cauchy-féle középértéktétel). Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f és g az (a, b) intervallumon értelmezett olyan differenciálható függvények, melyeknek létezik és véges a határértéke mind az a , mind b pontban, végül tegyük fel, hogy g deriváltja az (a, b) intervallum egyetlen pontjában sem nulla. Ekkor I. $\lim_b g - \lim_a g \neq 0$; II. van olyan $w \in (a, b)$, melyre

$$\frac{\lim_b f - \lim_a f}{\lim_b g - \lim_a g} = \frac{f'(w)}{g'(w)}.$$

7. Kritikus határértékek

A határértékek és az algebrai műveletek kapcsolatáról szóló szakaszban két nullához tartó függvény hányadosáról semmi általános érvényűt nem tudtunk állítani, s hasonló volt a helyzet a $\pm\infty$ -hez tartó függvények hányadosa esetén is. A differenciálszámítás eszközeinek birtokában viszont már tudunk bizonyítani néhány hasznos állítást ebben a témakörben. Ezek közül az elsőnek (melyet „gyenge L'Hospital-szabály”-nak fogunk nevezni) a bizonyításához elegendő a differenciálhatóság definícióját használni:

7.1. Tétel. Legyen u a H számhalmaz belső pontja, f és g egyaránt a H halmazon értelmezett, és az u pontban differenciálható függvény, tegyük fel továbbá, hogy $f(u) = g(u) = 0 \neq g'(u)$. Ekkor az f/g függvénynek van határértéke az u pontban, és ez $f'(u)/g'(u)$ -val egyenlő.

Bizonyítás. $g'(u) \neq 0$ és $u \in \text{int } H$ miatt van olyan r pozitív szám, melyre minden $x \in \dot{B}(u, r)$ esetén $x \in H$ és $g(x) \neq 0$ (4.3.II.). A továbbiakban csak ilyen x számokra szorítkozva, egyszerűsítsük az $f(x)/g(x)$ törtet $x - u$ -val, és használjuk fel az $f(u) = g(u) = 0$ feltételt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K_u^f(x)}{K_u^g(x)},$$

az utóbbi tört számlálóját, illetve nevezőjét tart az $f'(u)$, illetve a $g'(u)$ számhoz, az utóbbi nullától különböző, ezért a hányados határértéke e két szám hányadosával egyenlő. $\square$

Nem ilyen egyszerű a helyzet, ha az a pont, amelyben a határértéket keressük, nincs benne az értelmezési tartományban, vagy benne van ugyan, de ott a függvényeink nem differenciálhatók. Ilyen esetekben is előfordulhat azonban, hogy az alábbi tétel segítségével meg tudjuk határozni a hányados határértékét:

7.2. Tétel (az 1. L'Hospital-szabály). Legyen I nyílt intervallum, u pedig ennek vagy eleme, vagy végpontja (azaz $u \in I'$), F és G az $I \setminus \{u\}$ halmazon értelmezett olyan differenciálható függvények, melyeknek a határértéke az u helyen nulla. Ha van olyan pozitív r szám, melyre minden $x \in I \cap \dot{B}(u, r)$ esetén $G'(x) \neq 0$, és létezik a $\lim_u F'/G' =: v$, akkor u torlódási pontja az F/G függvény értelmezési tartományának, és ott e függvény határértéke v -vel egyenlő.

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy az $I \cap \dot{B}(u, r)$ halmazon a G függvény nem veszi fel a nulla értéket. Ha u végpontja az I intervallumnak, akkor ez a metszethalmaz egy olyan (a, b) nyílt intervallum, melynek egyik végpontja u . Ha lenne G -nek egy (a, b) -beli z gyökhelye, akkor G határértéke is nulla lenne a z helyen (hiszen G itt folytonos), de akkor — J -vel jelölve azt a nyílt intervallumot, melynek végpontjai u és z — a $G|_J$ függvényé is, tehát a $G|_J$ függvény teljesítené az általánosított Rolle-tétel feltételeit, holott a deriváltjának nincs gyökhelye. Ha u belső pontja I -nek, akkor az $I \cap \dot{B}(u, r)$ halmaz két diszjunkt nyílt intervallum uniója, de mindkét intervallumról elmondható mindaz, amit az imént az (a, b) intervallumról elmondtunk.

Mínt hogy u torlódási pontja az $I \cap \dot{B}(u, r)$ halmaznak, még inkább torlódási pontja a bővebb $D(F/G)$ halmaznak. Az F/G határértékére vonatkozó állítás bizonyítása céljából legyen ε tetszőleges pozitív szám, $\delta \in (0, r)$ pedig olyan szám, melyre minden $w \in I \cap \dot{B}(u, \delta)$ esetén $F'(w)/G'(w) \in B(v, \varepsilon)$. Ezek után elég azt igazolni, hogy minden

$x \in I \cap \dot{B}(u, \delta)$ esetén $F(x)/G(x) \in B(v, \varepsilon)$, ehhez pedig azt, hogy minden $x \in I \cap \dot{B}(u, \delta)$ számhoz található olyan $w \in I \cap B(u, \delta)$, melyre $F(x)/G(x) = F'(w)/G'(w)$. Legyen tehát $x \in I \cap \dot{B}(u, \delta)$ és jelöljük J -vel azt a nyílt intervallumot, amelynek végpontjai u és x . Ez a J részhalmaza az $I \cap \dot{B}(u, \delta)$ halmaznak, az $(F|_J, G|_J)$ függvénytérpár teljesíti az általánosított Cauchy-féle középértéktétel feltételeit, hiszen a leszűkített függvények határértékei az x pontban megegyeznek a leszűkítés nélküli függvények ottani helyettesítési értékeivel, az u pontban pedig nullával. E középértéktétel szerint tehát valóban létezik olyan w , amilyennek a létezését állítottuk. $\square$

7.3. Tétel (a 2. L'Hospital-szabály). Legyen I nyílt intervallum, u pedig ennek vagy eleme, vagy végpontja (azaz $u \in I'$), legyenek F és G az $I \setminus \{u\}$ halmazon értelmezett differenciálható függvények. Ha a $|G|$ függvény határértéke az u helyen $+\infty$, van olyan pozitív r szám, melyre minden $x \in I \cap \dot{B}(u, r)$ esetén $G'(x) \neq 0$, és létezik a $\lim_u F'/G' =: v$, akkor u torlódási pontja az F/G függvény értelmezési tartományának, és ott e függvény határértéke v -vel egyenlő.

Bizonyítás. Elég a következő két állítást bizonyítani: 1. Ha u nem bal végpontja az I intervallumnak, akkor egy bal oldali pontozott környezetében a G függvény értéke mindenütt nullától különböző, és az F/G függvény bal oldali határértéke az u helyen v ; 2. Ha u nem jobb végpontja az I intervallumnak, akkor egy jobb oldali pontozott környezetében a G függvény értéke mindenütt nullától különböző, és az F/G függvény jobb oldali határértéke az u helyen v .

1. A G függvénynek az $I \cap \dot{B}_-(u, r)$ nyílt intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton, mert a deriváltja minden pontban nullától különböző (lásd az általánosított Rolle-tétel előtt bizonyított 6.3. Lemmát), ezért az u helyen van határértéke, ez csakis $+\infty$ vagy $-\infty$ lehet, mert a $|G|$ függvény határértéke az u helyen $+\infty$. Ebből következik egy olyan $p \in (0, r]$ szám létezése, melyre minden $x \in I \cap \dot{B}_-(u, p)$ esetén $G(x) \neq 0$. Ezek után elég az F/G függvénynek az $I \cap \dot{B}_-(u, p)$ intervallumra való leszűkítésével foglalkozni, erről bizonyítani, hogy határértéke az u helyen v . Ezt a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv kiegészítésének felhasználásával tesszük: azt igazoljuk, hogy ha az u -hoz tartó szigorúan monoton (növe) (x_n) sorozat minden tagja az $I \cap \dot{B}_-(u, p)$ intervallumban van, akkor $\lim(F(x_n)/G(x_n)) = v$. Minthogy a $(G(x_n))$ sorozat szigorúan monoton és határértéke $+\infty$ vagy $-\infty$, Stolz tétele szerint elég azt bizonyítani, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{G(x_{n+1}) - G(x_n)} = v.$$

Ebből a célból alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt minden n pozitív egész esetén az F, G függvényeknek arra a leszűkítésére, melyeknek az értelmezési tartománya az $[x_n, x_{n+1}]$ intervallum. Így kapunk egy olyan (w_n) sorozatot, melyre minden n esetén $x_n < w_n < x_{n+1} < w_{n+1} < u$ (tehát ez is u -hoz tartó szigorúan monoton növe sorozat) és

$$\frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{G(x_{n+1}) - G(x_n)} = \frac{F'(w_n)}{G'(w_n)}.$$

És minthogy a jobb oldalon álló sorozat határértéke a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint v , a bizonyítás elején megfogalmazott 1. állítás igazolását befejeztük.

A 2. állítás bizonyítása hasonlóan végezhető: bal oldali pontozott környezetek helyett jobb oldaliakkal, illetve szigorúan növe sorozatok helyett szigorúan fogyó sorozatokkal, stb. (Sőt, valójában a 2. állítás az 1. állítás következményének is tekinthető.) $\square$

8. Többször differenciálható függvények

Emlékeztetünk rá, hogy a derivált függvény fogalmát a fejezet elején értelmeztük (1.14).

A valós változós valós értékű függvények magasabb rendű deriváltjait rekurzív módon értelmezzük:

8.1. Definíció (Magasabb rendű derivált függvények). Legyen f egyváltozós valós függvény és n olyan pozitív egész, amelyre értelmezett az f függvénynek az $f^{(n)} : \text{int } D(f) \rightarrow \mathbf{R}$ n -edik derivált függvénye (valójában $n = 1, 2$, és 3 esetén az $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ jelölések helyett inkább az f', f'', f''' jelöléseket szokás használni). Ha az utóbbinak létezik a korábban definiált értelemben vett derivált függvénye (vagyis van legalább egy olyan $u \in \text{int } D(f^{(n)})$ pont, ahol az $f^{(n)}$ függvény differenciálható, akkor az $(f^{(n)})'$ derivált függvényt az f függvény $n+1$ -edik derivált függvényének nevezzük, $f^{(n+1)}$ -gyel jelöljük, és az $f^{(n+1)}(u)$ helyettesítési értéket az f függvény u pontban vett $n+1$ -edik deriváltjának is nevezzük. Végezetül állapodjunk meg abban is, hogy f nulladik deriváltján magát az f függvényt értjük, s az a kijelentés, hogy f az u pontban (a H halmazon) nullaszer differenciálható, jelentse azt, hogy u eleme (H része) f értelmezési tartományának.

8.2. Definíció (Többszörös differenciálhatóság egy pontban, illetve nyílt halmazon). Az a kijelentés, hogy f az u helyen n -szer differenciálható, azt jelenti, hogy u eleme az n -edik derivált függvény értelmezési tartományának,

az pedig, hogy f a H nyílt halmazon n -szer differenciálható, azt jelenti, hogy f a H halmaz minden egyes pontjában n -szer differenciálható, speciálisan abban az esetben, ha az utóbbi kijelentés $H := D(f)$ mellett teljesül, az f függvényt röviden n -szer differenciálhatónak nevezzük. Hasonlóan, az a kijelentés, hogy f az u pontban [a H nyílt halmazon] n -szer folytonosan differenciálható, azt jelenti, hogy egyrészt f az u pontban [a H nyílt halmazon] n -szer differenciálható, másrészt az $f^{(n)}$ függvény folytonos az u pontban [a H halmaz minden egyes pontjában].

Az „ n -szer differenciálható” vagy az „ n -szer folytonosan differenciálható” lehet olyan függvény jelzője is, melynek értelmezési tartománya zárt vagy félig nyílt intervallum (az $n = 1$ esetet illetően lásd a 1.13. definíciót). A definíció lényege egyszerűen annyi, hogy ilyenkor a végpontbeli egy oldali deriváltat deriválnak tekintjük:

8.3. Definíció. Legyen J zárt vagy félig nyílt intervallum, $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ és n pozitív egész. Annak a mondatnak a jelentését, hogy f n -szer differenciálható [f n -szer folytonosan differenciálható] n szerinti rekurzióval lehet megadni, és pedig úgy, hogy ezzel együtt megadjuk a kiterjesztett n -edik derivált értelmezését is. f egyszer differenciálható, ha egyrészt f differenciálható J minden egyes belső pontjában, másrészt ha $u \in J$ végpontja J -nek, akkor f az u pontban egy oldalról differenciálható. Az f függvény kiterjesztett értelemben vett első derivált függvényén ilyenkor a derivált függvénynek azt a J -n értelmezett kiterjesztését értjük, amelynek az értéke $u \in J \setminus \text{int } J$ esetén f -nek az u -beli egy oldali deriváltjával egyenlő. Ha ez a függvény még folytonos is, akkor azt mondjuk, hogy f (egyszer) folytonosan differenciálható. Hasonlóan, ha az f kiterjesztett értelemben vett n -edik derivált függvénye (egyszer) differenciálható, akkor f -et $n+1$ -szer differenciálhatónak nevezzük, és ha f ilyen, akkor a kiterjesztett értelemben vett $n+1$ -edik derivált függvénye J minden egyes belső pontjához az ottani $n+1$ -edik deriváltat, míg egy $u \in J \setminus \text{int } J$ ponthoz a kiterjesztett értelemben vett n -edik derivált függvénynek az u -beli egy oldali deriváltját rendeli. Ha ez a kiterjesztett értelemben vett $n+1$ -edik derivált függvény folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f $n+1$ -szer folytonosan differenciálható.

8.4. Definíció (végtelen sokszor differenciálható függvény). Az a kijelentés, hogy az f függvény végtelen sokszor differenciálható az u pontban, illetve a $H(\subset \text{int } D(f))$ nyílt halmazon, azt jelenti, hogy f minden pozitív egész n esetén n -szer differenciálható az u pontban, illetve a H halmazon. A $H = D(f)$ esetben most is kimaradhat a mondatból az, hogy „a $D(f)$ halmazon”.

8.5. Feladat. Bizonyítandó, hogy az alábbi függvények mindegyike végtelen sokszor differenciálható: a racionális törtfüggvények, az exponenciális függvények, a logaritmusfüggvények, a pozitív számok halmazán értelmezett hatványfüggvények, bármely hatványfüggvénynek a pozitív számok halmazára való leszűkítése, $\cos$, $\sin$, tg , ctg , arctg , arctg , $\arccos|_{(-1,1)}$, $\arcsin|_{(-1,1)}$, ch , sh , th , cth , $\text{arch}|_{(1,+\infty)}$, arsh , arth , arcth .

8.6. Feladat. Ha n pozitív egész, f és g ugyanazon nyílt halmazon értelmezett valós változós valós értékű függvények, és mindkét függvény n -szer differenciálható az u pontban, akkor $f+g$ is, fg is, és minden valós c szám esetén cf is n -szer differenciálható az u helyen, továbbá

$$(f+g)^{(n)}(u) = f^{(n)}(u) + g^{(n)}(u), \quad (fg)^{(n)}(u) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(u)g^{(n-i)}(u), \quad (cf)^{(n)}(u) = cf^{(n)}(u).$$

Általánosítsuk az összegre vonatkozó állítást több tagú összegre is!

8.7. Megjegyzés. A szorzat n -edik deriváltjára vonatkozó formulát Leibniz-formulának szokták nevezni, teljes indukcióval történő bizonyítását elvégezhetjük például úgy, hogy a binomiális tétel teljes indukciós bizonyítását másoljuk.

A hatványfüggvények deriválási szabályának alkalmazásával igen könnyen oldható meg az alábbi

8.8. Feladat. Legyen u tetszőleges valós szám, k pozitív egész, és $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ az a függvény, amely minden egyes valós x -hez az $(x-u)^k$ számot rendeli. Bizonyítandó, hogy ekkor minden $i \in \mathbf{0}, k-1$ esetén $f^{(i)}(u) = 0$; $f^{(k)}(u) = k!$, továbbá ha x tetszőleges valós szám, akkor az $f^{(i)}(x)$ derivált minden k -nál nagyobb i egész esetén nullával, $i = k$ esetén pedig $k!$ -sal egyenlő.

8.9. Definíció (n -edrendben kicsi függvény). Legyen n nemnegatív egész, f egyváltozós valós függvény és $u \in \mathbf{R}$ torlódási pontja f értelmezési tartományának. Ekkor az a kijelentés, hogy f az u helyen n -edrendben kicsi, azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{(x-u)^n} = 0.$$

8.10. Tétel. Legyen n pozitív egész, f olyan egyváltozós valós függvény, amely egy u pont valamely környezetében $n-1$ -szer, és az u helyen n -szer differenciálható, végül tegyük fel, hogy minden n -nél nem nagyobb nemnegatív k egész esetén $f^{(k)}(u) = 0$. Ekkor f az u helyen n -edrendben kicsi.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n = 1$, akkor az állítás az u -beli derivált definíciójából következik. Legyen n olyan pozitív egész, melyre az állítás igaz és f olyan egyváltozós valós függvény, amely egy u pont valamely U környezetében n -szer, és az u pontban $n+1$ -szer differenciálható. Ekkor az f' függvényre alkalmazható az indukciós feltevés, ezért f' az u helyen n -edrendben kicsi. Legyen ε tetszőleges pozitív szám, δ pedig olyan pozitív szám, amelyre minden $t \in \dot{B}(u, \delta)$ esetén $t \in U$ és

$$\left| \frac{f'(t)}{(t-u)^n} \right| < \varepsilon.$$

Ezek után elég azt igazolni, hogy minden $x \in \dot{B}(u, \delta)$ esetén

$$\left| \frac{f(x)}{(x-u)^{n+1}} \right| < \varepsilon.$$

Legyen tehát $x \in \dot{B}(u, \delta)$, I_x az az intervallum, melynek végpontjai u és x , és alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt f -nek I_x -re való leszűkítésére: az I_x intervallum belsejében található olyan c_x , melyre

$$\frac{f(x)}{x-u} = f'(c_x),$$

s amely persze $I \setminus \{u\} \subset \dot{B}(u, \delta)$ miatt benne van a $\dot{B}(u, \delta)$ pontozott környezetben, ezért – felhasználva azt is, hogy c_x az u és x pontok között van, s ennél fogva $|c_x - u|/|x - u| < 1$,

$$\left| \frac{f(x)}{(x-u)^{n+1}} \right| = \left| \frac{f(x)}{x-u} \frac{1}{(x-u)^n} \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{(c_x-u)^n} \cdot \frac{(c_x-u)^n}{(x-u)^n} \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{(c_x-u)^n} \right| \left| \frac{c_x-u}{x-u} \right|^n < \varepsilon$$

adódik. □

9. A lokális Taylor-formula és következményei

9.1. Definíció (Taylor-polinomok). Ha n nemnegatív egész, az egyváltozós valós f függvény n -szer differenciálható az u pontban (ez $n = 0$ esetén csak annyit jelentsen, hogy értelmezett az u pontban) és $i \in \overline{0, n}$, akkor az f függvény u ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinomja a

$$T_{u,n}^f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (x-u)^k$$

hozzárendeléssel értelmezett $T_{u,n}^f$ polinomfüggvény.

9.2. Állítás. Az iménti definícióban megfogalmazott feltételek mellett minden $i \in \overline{0, n}$ esetén $(T_{u,n}^f)^{(i)}(u) = f^{(i)}(u)$.

Bizonyítás. Lásd a 8.8., 8.6. feladatokat. □

9.3. Megjegyzés. A következő szakaszban (10.4) megmutatjuk, hogy a legfeljebb n -edfokú polinomfüggvények között $T_{u,n}^f$ az egyetlen olyan p polinomfüggvény, amelyre teljesül az, hogy

$$\forall i \in \overline{0, n} \quad p^{(i)}(u) = f^{(i)}(u).$$

9.4. Tétel (lokális Taylor-formula – két változatban). Legyen n pozitív egész és tegyük fel, hogy az egyváltozós valós f függvény az u pont egy környezetében $n-1$ -szer, az u pontban pedig n -szer differenciálható. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - T_{u,n}^f(x)}{(x-u)^n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - T_{u,n-1}^f(x)}{(x-u)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u).$$

Bizonyítás. 8.6. és 8.8. szerint az $f - T_{u,n}^f$ függvényre alkalmazható az előző szakasz tétele, tehát ez a függvény az u helyen n -edrendben kicsi. A tétel második állítása egyenértékű az elsővel, hiszen egyenértékű azzal, hogy az

$$x \mapsto \frac{f(x) - T_{u,n-1}^f(x)}{(x-u)^n} - \frac{1}{n!} f^{(n)}(u)$$

függvény határértéke az u helyen nulla, viszont ez utóbbi függvény azonos az

$$x \mapsto \frac{f(x) - T_{u,n}^f(x)}{(x-u)^n}$$

függvénnyel (szorozzuk és osszuk a második tagot $(x-u)^n$ -nel, majd hozzunk közös nevezőre). □

9.5. Definíció. Ha n pozitív egész, $u \in \mathbf{R}$, f valós változós valós értékű függvény, és minden $i \in \overline{0, n-1}$ $f^{(i)} = 0$, akkor azt mondjuk, hogy u az f függvénynek legalább n -szeres gyök(hely)e. Ha ráadásul létezik az f n -edik deriváltja is az u helyen, de az már nem nulla, akkor azt mondjuk, hogy u az f -nek pontosan n -szeres gyök(hely)e.

A lokális Taylor-formula segítségével be tudjuk bizonyítani a kritikus határértékek című szakasz első tételének („gyenge L'Hospital-szabály”) alábbi egyszerű általánosítását:

9.6. Tétel. Tegyük fel, hogy u belső pontja a H számhalmaznak, f és g a H halmazon értelmezett és az u pontban n -szer differenciálható függvények, u az f -nek legalább n -szeres gyöke, a g -nek pedig pontosan n -szeres gyöke. Ekkor f/g értelmezett az u egy pontozott környezetében és $\lim_u f/g = f^{(n)}(u)/g^{(n)}(u)$.

Bizonyítás. Minthogy u legalább n -szeres gyöke mind az f , mind a g függvénynek, minden $x \in D(f/g)$ esetén

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{n! \frac{f(x) - T_{u,n-1}^f(x)}{(x-u)^n}}{n! \frac{g(x) - T_{u,n-1}^g(x)}{(x-u)^n}}.$$

A lokális Taylor-formula szerint a számláló határértéke $f^{(n)}(u)$, a nevezőé $g^{(n)}(u)$, a tétel feltétele szerint a nevező határértéke nem nulla, ebből a tétel mindkét állítása következik. $\square$

A szakasz további tételeiben a valamely pontban többször differenciálható függvény lokális viselkedését vizsgáljuk, a szóban forgó pont a derivált többszörös gyökhelye lesz.

9.7. Tétel. Legyen n pozitív egész, az f függvény valamely u pont egy környezetében $n-1$ -szer, magában az u pontban n -szer differenciálható, végül tegyük fel, hogy minden $i \in \overline{1, n-1}$ esetén $f^{(i)}(u) = 0$.

1. Ha f -nek lokális szélsőértéke van az u helyen és n páratlan, akkor $f^{(n)}(u) = 0$.
2. Ha f -nek lokális minimuma [maximuma] van az u helyen és n páros, akkor $f^{(n)}(u) \geq 0$ [$f^{(n)}(u) \leq 0$].
3. Ha n páros és $f^{(n)}(u) > 0$ [$f^{(n)}(u) < 0$], akkor f -nek az u helyen szigorú lokális minimuma [maximuma] van.

Bizonyítás. A lokális Taylor-formula szerint

$$f^{(n)}(u) = n! \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{(x-u)^n}.$$

Mindegyik állítás a függvényhatárérték és rendezés kapcsolatáról szóló tétel egyszerű következménye:

1. Az említett tétel az $x \mapsto (n!)(f(x) - f(u))/(x-u)^n$ függvénynek mind a $D(f) \cap (-\infty, u)$, mind a $D(f) \cap (u, +\infty)$ halmazra való leszűkítésére alkalmazható, ebből azt kapjuk, hogy e két függvény egyikének határértéke az u helyen nemnegatív, a másiké nempozitív, de minthogy mindkét (egy oldali) határértéknek meg kell egyeznie a leszűkítés nélküli függvény határértékével, az $f^{(n)}(u)$ számmal, az csak nulla lehet.

2. Az $x \mapsto (n!)(f(x) - f(u))/(x-u)^n$ függvénynek az u egy pontozott környezetében felvett értékei nemnegatívak [nempozitívak], ezért az u -beli határértékéről is ugyanez mondható.

3. Az imént is vizsgált függvényről ezúttal azt tudjuk, hogy u -beli határértéke pozitív [negatív], ebből következik, hogy az u egy pontozott környezetében felvett értékei ugyanilyen előjelűek. És minthogy közben a tört nevezője e pontozott környezet minden pontjában pozitív, a tört előjele megegyezik a számláló előjelével. $\square$

9.8. Tétel. Legyen n pozitív egész, az f függvény valamely u pont egy környezetében $n-1$ -szer, magában az u pontban n -szer differenciálható, végül tegyük fel, hogy minden $i \in \overline{1, n-1}$ esetén $f^{(i)}(u) = 0$.

1. Ha f az u pontban növekvő [fogyó] és n páratlan, akkor $f^{(n)}(u) \geq 0$ [$f^{(n)}(u) \leq 0$].
2. Ha f növekvő [fogyó] az u pontban és n páros, akkor $f^{(n)}(u) = 0$.
3. Ha n páratlan és $f^{(n)}(u) > 0$ [$f^{(n)}(u) < 0$], akkor f az u pontban szigorúan növekvő [fogyó].

Bizonyítás vázlata. A lokális Taylor-formula szerint

$$f^{(n)}(u) = n! \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - T_{u,n-1}^f(x)}{x-u} \frac{1}{(x-u)^{n-1}} = n! \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u)}{x-u} \frac{1}{(x-u)^{n-1}}.$$

Innentől kezdve az előző bizonyítás lényegében szó szerint másolható. $\square$

10. Középtértéktételek II.

10.1. Tétel (n -edrendű általánosított Rolle-tétel). Legyen n pozitív egész, φ nyílt intervallumon értelmezett n -szer differenciálható függvény és $u \in \overline{\mathbf{R}}$ az intervallum egyik végpontja. Tegyük fel egyrészt azt, hogy φ -nek az intervallum mindkét végpontjában létezik határértéke és ez a két határérték egyenlő egymással, másrészt azt, hogy minden egyes $k \in \overline{1, n-1}$ esetén $\lim_u \varphi^{(k)} = 0$. Ekkor az intervallumban van olyan pont, ahol φ n -edik deriváltja nullával egyenlő.

Bizonyítás. n szerinti teljes indukcióval. Az $n = 1$ esetet már bizonyítottuk (általánosított Rolle-tétel). Legyen n olyan pozitív egész, amelyre igaz a tétel, $h : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ pedig olyan $n + 1$ -szer differenciálható függvény, melynek a két végpontban létezik határértéke, $\lim_a h = \lim_b h$, továbbá amelyre $u = a$ vagy $u = b$, és minden $k \in \overline{1, n}$ esetén $\lim_u h^{(k)} = 0$. Az általánosított Rolle-tétel szerint van olyan $v \in (a, b)$, ahol h deriváltja nulla. Legyen φ a h' függvénynek az a leszűkítése, melynek értelmezési tartománya az u és v végpontok által meghatározott I nyílt intervallum. Ez a függvény nyilván n -szer differenciálható, minden $k \in \overline{0, n-1}$ esetén $\lim_u \varphi^{(k)} = 0$, továbbá $\lim_v \varphi = 0$. Az utóbbit azért állíthatjuk, mert h' a v helyen n -szer — tehát legalább egyszer — differenciálható, ezért ott folytonos is, és (lévén v nem-izolált pontja az (a, b) intervallumnak) így $0 = h'(v) = \lim_v h' = \lim_v h'|_I = \lim_v (h|_I)' = \lim_v \varphi$. Erre a függvényre tehát alkalmazható az indukciós feltétel: az I intervallum valamely pontjában az n -edik deriváltja nulla, ezért a h függvény $n + 1$ -edik deriváltja ebben a pontban nulla. $\square$

10.2. Tétel (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal). Ha n pozitív egész, $I \subset \mathbf{R}$ nemelfajuló intervallum, $u \in \text{int } I$ és $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos, I belsejében n -szer differenciálható függvény, akkor minden u -tól különböző I -beli v számhoz található u és v között olyan w szám, amelyre

$$f(v) - T_{u,n-1}^f(v) = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} (v - u)^n.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $v \in I \setminus \{u\}$ számot, u és v közül a kisebbiket jelöljük a -val, a nagyobbikat b -vel. Az előző tételt fogjuk alkalmazni az (a, b) intervallumon az $x \mapsto f(x) - T_{u,n-1}^f(x) - \frac{c}{n!} (x - u)^n$ hozzárendeléssel értelmezett φ függvényre, ahol a c valós számot úgy határozzuk meg, hogy $\lim_v \varphi = 0$ legyen, vagyis c az $f(v) - T_{u,n-1}^f(v) = \frac{c}{n!} (v - u)^n$ egyenlet egyetlen megoldása. f n -szer differenciálható, a polinomfüggvények pedig végtelen sokszor, ezért φ n -szer differenciálható I belsejében. Ugyancsak f n -szer differenciálható voltából kapjuk, hogy az $f^{(k)}$ függvény minden $k \in \overline{0, n-1}$ esetén folytonos, ezért az u helyen van határértéke és ez megegyezik a helyettesítési értékével. Ebből, a hatványfüggvények differenciálási szabályából, és egyéb egyszerű differenciálási szabályokból következik, hogy minden n -nél kisebb nemnegatív k -ra $\lim_u \varphi^{(k)} = 0$. Ezzel megmutattuk, hogy φ teljesíti az előző tétel feltételeit. Az $x \mapsto \frac{c(x-u)^n}{n!}$ polinomfüggvény n -edik deriváltja a konstans c függvény, a $T_{u,n-1}^f$ polinomfüggvényé — lévén a fokszáma kisebb mint n — azonosan nulla, következésképp $\varphi^{(n)} = f^{(n)} - c$, így az előző tételből éppen az adódik, amit állítottunk. $\square$

Míg a lokális Taylor-formula arról szól, hogyan közelíti a $T_{v,n}^f$ Taylor-polinom az f függvényt a v pont közelében egy-egy rögzített n esetén, a legutóbbi tétel segítségével jónéhány esetben azt is lehet bizonyítani, hogy rögzített, és esetleg v -tól távol lévő x pontra az $n \mapsto T_{v,n}^f(x)$ sorozat konvergál az $f(x)$ számhoz. Erre a szituációra az első példával az alábbi tételben találkozunk, a következő kettővel pedig a trigonometrikus függvények tárgyalása során.

10.3. Tétel. Minden valós x szám esetén

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Bizonyítás vázlata. Ha $x = 0$, akkor az egyenlőség nyilvánvaló. Legyen tehát a továbbiakban x tetszőleges 0-tól különböző valós szám.

A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula szerint ($u := 0$, $f := \exp$) minden pozitív egész n -hez található x és 0 között olyan w_n , amelyre

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right| = |e^x - T_{0,n-1}^{\exp}(x)| = \frac{e^{w_n} |x|^n}{n!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!},$$

$\square$

Most térünk rá annak a Taylor-polinomok definiálása után tett 9.3. megjegyzésnek a bizonyítására, amely az ottanihoz képest kissé általánosabban így fogalmazható:

10.4. Állítás. Bármely valós u -hoz, bármely nemnegatív egész n -hez, és bármely $n + 1$ tagú valós $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ sorozathoz legfeljebb egy olyan legfeljebb n -edfokú p polinomfüggvény található, melyre minden $k \in \overline{0, n}$ esetén $p^{(k)}(u) = c_k$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van legalább két ilyen polinomfüggvény és a különbségüket jelöljük g -vel. Ekkor tehát g nem azonosan nulla, legfeljebb n -edfokú polinomfüggvény, melyre minden $k \in \overline{0, n}$ esetén $g^{(k)}(u) = 0$. Azt ugyan az algebrából is lehet tudni, hogy ilyen polinom(függvény) nem létezik, de most ezt a következőképpen is bizonyíthatjuk: lévén g legfeljebb n -edfokú polinomfüggvény, az $n + 1$ -edik derivált függvénye az azonosan nulla függvény, tehát ha x tetszőleges u -tól különböző valós szám, akkor x és u között van olyan v valós szám, melyre

$$g(x) = g(x) - T_{u,n}^g(x) = \frac{g^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}(x-u)^{n+1} = 0.$$

□

11. Konvex függvények

11.1. Tétel. Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ nemelfajuló intervallum bal végpontja a , jobb végpontja b , továbbá $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ konvex függvény. Ekkor I. f -nek az $I \cap (a, b]$ intervallum minden pontjában van bal oldali deriváltja és az $I \cap [a, b)$ intervallum minden pontjában van jobb oldali deriváltja, II. f az (a, b) intervallum minden pontjában balról is, jobbról is differenciálható, továbbá minden (a, b) -beli v pontban $f'_-(v) \leq f'_+(v)$, III. mind az f'_- , mind az f'_+ függvény monoton növekvő, IV. az (a, b) intervallumban csak megszámlálható sok olyan pont lehet, ahol f nem differenciálható.

Bizonyítás. I. A konvex függvények jellemzéseiről szóló tétel szerint f mindegyik különbségihányados-függvénye monoton növekvő, ezért létezik egy oldali határértéke minden olyan pontban, ahol a létezésének kérdése egyáltalán felvethető.

II. Legyen $v \in (a, b)$, jelöljük a K_v^f függvény (a, v) -re, illetve (v, b) -re való leszűkítésének értékkészletét A -val, illetve B -vel. A K_v^f függvény monoton növekvő volta miatt bármely $a \in A$ és $b \in B$ esetén $a \leq b$, vagyis B minden eleme felső korlátja A -nak és A minden eleme alsó korlátja B -nek. Ismét a monoton függvény egy oldali határértékéről szóló tétel szerint $f'_-(v) = \sup A$ és $f'_+(v) = \inf B$, az előbb mondottakból következően minden $b \in B$ esetén $\sup A \leq b$, vagyis $\sup A$ alsó korlátja B -nek, ezért nem nagyobb, mint $\inf B$.

III. A II. állítás miatt most már elég annyit bizonyítani, hogy ha $u \in I$, $v \in I$ és $u < v$, akkor $f'_+(u) \leq f'_-(v)$. Ez ismét a monoton függvény egy oldali határértékeiről szóló tételből következik:

$$f'_+(u) = \lim_{u \rightarrow 0} K_u^f = \inf K_u^f|_{I \cap (u, +\infty)} \leq K_u^f(v) = K_v^f(u) \leq \sup K_v^f|_{I \cap (-\infty, v)} = \lim_{v \rightarrow 0} K_v^f = f'_-(v).$$

IV. Minden monoton növekvő függvény szakadási pontjainak halmaza megszámlálható, ezért a III. állítás miatt elég azt igazolni, hogy ha egy v pontban f nem differenciálható, akkor az f'_+ függvény nem folytonos a v helyen. A II. állítás alapján mondhatjuk, hogy $f'_-(v) < f'_+(v)$. Ha az f'_+ függvény akárcsak balról folytonos lenne a v helyen, akkor létezne olyan $u \in (a, v)$, melyre $f'_-(v) < f'_+(u)$ lenne, ami ellentmondana az előző bekezdésben bizonyítottaknak.

□

11.2. Megjegyzés. Igazolható, hogy ha egy $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre teljesülnek a II.-III. állítások, akkor f konvex.

11.3. Tétel (a differenciálható konvex függvények jellemzése). Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ nemelfajuló intervallum bal végpontja a , jobb végpontja b , továbbá $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ olyan folytonos függvény, amely differenciálható az (a, b) intervallum minden pontjában. Ekkor az alábbi kijelentések egymással egyenértékűek: 1. f konvex, 2. f' monoton növekvő az (a, b) intervallumon, 3. ha $u \in (a, b)$ és $x \in I \setminus \{u\}$, akkor

$$f(x) \geq f(u) + f'(u)(x - u).$$

Bizonyítás. $1. \Rightarrow 3.$ Korábban bizonyított tétel szerint f konvex voltából következik, hogy K_u^f monoton növekvő. És minthogy e függvény határértéke az u helyen $f'(u)$, a $K_u^f(x) - f'(u)$ különbség az u -nál kisebb x -ekre nem pozitív, az u -nál nagyobbakra pedig nem negatív. Ebből következik, hogy minden $x \in I \setminus \{u\}$ esetén

$$f(x) - f(u) - f'(u)(x - u) = \left[\frac{f(x) - f(u)}{x - u} - f'(u) \right] (x - u) = [K_u^f(x) - f'(u)](x - u) \geq 0.$$

$3. \Rightarrow 2.$ Legyen $a < v < w < b$, igazoljuk, hogy $f'(v) \leq f'(w)$. A 3. állítást először az $(x, u) := (w, v)$, másodszor az $(x, u) := (v, w)$ szereposztással alkalmazva, majd az így adódó két egyenlőtlenséget összeadva ezt kapjuk:

$$0 \geq f'(v)(w - v) + f'(w)(v - w), \quad \text{azaz} \quad f'(v)(w - v) \leq f'(w)(w - v).$$

2. $\Rightarrow$ 1. A konvex függvények jellemzéseiről szóló tétel szerint f konvex voltára például abból is következtethetünk, hogy minden szigorúan monoton növekvő I -beli (u, v, w) hármásra $K_v^f(u) \leq K_v^f(w)$. Vegyünk tehát egy I -beli számokból alkotott tetszőleges szigorúan növekvő (u, v, w) hármast. A Lagrange-féle középértéktételből és f' monoton növekvő voltából következik, hogy – alkalmas $s \in (u, v)$ és $t \in (v, w)$ számokkal – $K_v^f(u) = f'(s) \leq f'(t) = K_v^f(w)$. $\square$

11.4. Megjegyzés. Az iménti bizonyítás 1. $\Rightarrow$ 3. része akkor is megismételhető, ha u végpontja az I intervallumnak és ott az f egy oldalról differenciálható, feltéve hogy $f'(u)$ helyébe az u -beli egy oldali deriváltat képzeljük – azzal a minimális változtatással, hogy ekkor az $x < u$, $x > u$ esetek közül az egyikről nem kell beszélni. Hasonlót kiegészítést lehet fűzni a bizonyítás 3. $\Rightarrow$ 2. részéhez is, úgyhogy az intervallumon értelmezett differenciálható konvex függvényeknek még a kiterjesztett értelemben vett derivált függvénye is monoton növekvő.

11.5. Tétel (a differenciálható szigorúan konvex függvények jellemzése). Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ nemelfajuló intervallum bal végpontja a , jobb végpontja b , továbbá $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ olyan folytonos függvény, amely differenciálható az (a, b) intervallum minden pontjában. Ekkor az alábbi kijelentések egymással egyenértékűek: 1. f szigorúan konvex, 2. f' szigorúan monoton növekvő az (a, b) intervallumon, 3. ha $u \in (a, b)$ és $x \in I \setminus \{u\}$, akkor

$$f(x) > f(u) + f'(u)(x - u).$$

11.6. Következmény (a kétszer differenciálható (szigorúan) konvex függvények). Legyen az $I \subset \mathbf{R}$ nemelfajuló intervallum, $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ olyan folytonos függvény, amely kétszer differenciálható az I intervallum minden belső pontjában. Ekkor a következő két kijelentés egymással egyenértékű: 1. f konvex, 2. f második deriváltja az I intervallum minden belső pontjában nemnegatív. Az alábbi kijelentések szintén egymással egyenértékűek: 1. f szigorúan konvex, 2. f második deriváltja az I intervallum minden belső pontjában nemnegatív, és I -nek nincs olyan nyílt részintervalluma, amelyen f'' azonosan nulla volna.

Az utóbbi állítás felhasználásával (is) ellenőrizhető, hogy az alábbi függvények mindegyike szigorúan konvex: az összes exponenciális függvény, az 1-nél kisebb alapú logaritmusfüggvények, az $\text{id} \cdot \ln$ függvény, akármelyik 1-nél nagyobb kitevőjű hatványfüggvénynek a nemnegatív számok halmazára való leszűkítése, akármelyik negatív kitevőjű hatványfüggvénynek a pozitív számok halmazára való leszűkítése, a ch függvény, a sh $|_{[0, +\infty)}$, a th $|_{(-\infty, 0]}$, minden k egész esetén a szinusz függvény leszűkítése a $[(2k - 1)\pi, 2k\pi]$ intervallumra és a koszinusz függvény leszűkítése a $[(2k + 1/2)\pi, (2k + 3/2)\pi]$ intervallumra, stb. Hasonlóan, szigorúan konkáv például az összes 1-nél nagyobb alapú logaritmusfüggvény, és mindazon hatványfüggvényeknek a nemnegatív számok halmazára való leszűkítése, amelyeknek a kitevője a $(0, 1)$ intervallumban van (így például a négyzetgyökfüggvény).

Megemlíjtük az előző bekezdésben mondottak néhány egyszerű következményét. Az alábbi tételek közül az elsőben az exponenciális függvény szigorú konvexitását, a másodikban a hatványfüggvények (leszűkítésének) szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv voltát használjuk.

11.7. Tétel (súlyozott mértani, illetve számtani közép). Ha n 1-nél nagyobb egész, minden $k \in \overline{1, n}$ esetén az a_k, b_k, t_k számok mindegyike pozitív, $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, továbbá mind az $a_1, \dots, a_n$, mind az $b_1^{1/t_1}, \dots, b_n^{1/t_n}$ számok között van két különböző, akkor

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \prod_{k=1}^n a_k^{t_k} < \sum_{k=1}^n t_k a_k, \\ \text{II.} \quad & \prod_{k=1}^n b_k < \sum_{k=1}^n t_k b_k^{\frac{1}{t_k}}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. I. Legyen minden $k \in \overline{1, n}$ esetén $x_k := \ln a_k$. Az $\ln$ függvény injektív volta miatt az x_k számok között is van két különböző.

$$\prod_{k=1}^n a_k^{t_k} = \prod_{k=1}^n (e^{x_k})^{t_k} = \prod_{k=1}^n e^{t_k x_k} = \exp \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right) < \sum_{k=1}^n t_k e^{x_k} = \sum_{k=1}^n t_k a_k,$$

az egyenlőtlenség az exponenciális függvény szigorú konvexitása miatt teljesül, az egyenlőségek pedig x_k definíciója, illetve a hatványozás azonosságai miatt.

II. Legyen $a_k := b_k^{\frac{1}{t_k}}$ és alkalmazzuk az I. állítást. $\square$

11.8. Megjegyzés. Az I. egyenlőtlenség bal, illetve jobb oldalán lévő számokat az $a_1, \dots, a_n$ számok $t_1, \dots, t_n$ „súlyokkal” képezett súlyozott mértani, illetve számtani közepének szokták nevezni; a $t_1 = \dots = t_n = 1/n$ esetben megkapjuk a közönséges mértani, illetve számtani közepet.

11.9. Megjegyzés. Az előző tétel bizonyításából kiolvasható, hogy az ottani I. egyenlőtlenség egyenértékű az exponenciális függvény szigorú konvexitásával: a következtetés iránya könnyen megfordítható, vagyis az I. egyenlőtlenségből következik az exponenciális függvényre vonatkozó Jensen-egyenlőtlenség.

11.10. Tétel. Ha n 1-nél nagyobb egész, minden $k \in \overline{1, n}$ esetén az a_k számok mindegyike pozitív, továbbá az $a_1, \dots, a_n$ számok között van két különböző, akkor a nullától különböző számok halmazán értelmezett

$$x \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^x \right)^{\frac{1}{x}} =: f(x)$$

függvény szigorúan monoton növekvő.

Bizonyítás. Azt kell bizonyítanunk, hogy ha a nullától különböző u és v számok közül v a nagyobb, akkor

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^u \right)^{\frac{1}{u}} < \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^v \right)^{\frac{1}{v}}.$$

Ha v pozitív, akkor ez egyenértékű azzal, amit úgy kapunk, hogy mindkét oldalt v -edik hatványra emeljük:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^u \right)^{\frac{v}{u}} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k^u)^{\frac{v}{u}},$$

az utóbbi pedig negatív u esetén a negatív (v/u) kitevőjű hatványfüggvény $\mathbf{R}^+$ -ra való leszűkítésének, pozitív u esetén az 1-nél nagyobb kitevőjű hatványfüggvény $\mathbf{R}^+$ -ra való leszűkítésének szigorú konvexitásából következik. Ha v negatív, akkor megint mindkét oldalt v -edik hatványra emelve

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^u \right)^{\frac{v}{u}} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k^u)^{\frac{v}{u}},$$

adódik, ekkor $v/u \in (0, 1)$, így az utóbbi egyenlőtlenség a $(0, 1)$ -beli kitevőjű hatványfüggvény $\mathbf{R}^+$ -ra való leszűkítésének szigorúan konkáv voltából következik. Természetesen mindhárom alkalommal kihasználtuk azt, hogy ha az a_k számok között van két különböző, akkor az a_k^u számok között is van – ez abból következik, hogy az u kitevőjű hatványfüggvény a pozitív számok halmazán szigorúan monoton, tehát injektív. $\square$

11.11. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a tételben szereplő hatványközepekkel a függvényhatárérték tárgyalása során már találkoztunk ($f(x)$ az $a_1, \dots, a_n$ számok x kitevőjű, vagy x -edik hatványközepe).

11.12. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az $u \in \text{int } D(f)$ pontban. Az u pontról akkor mondjuk, hogy inflexiós pontja az f -nek, ha van olyan r pozitív szám, melyre $f|_{(u-r, u]}$ szigorúan konkáv és $f|_{[u, u+r)}$ szigorúan konvex, vagy fordítva. u -ról akkor mondjuk, hogy gyengébb értelemben vett inflexiós pontja f -nek, ha az $f - T_{u,1}^f$ függvény az u pontban szigorúan lokálisan növekvő vagy szigorúan lokálisan fogyó.

11.13. Megjegyzés. Minthogy a $\varphi := f - T_{u,1}^f$ függvény az u helyen a 0 értéket veszi fel, a függvény u -beli szigorúan növekvő, illetve fogyó volta egy olyan pozitív r szám létezésével egyenértékű, melyre egyrészt $B(u, r) \subset D(f)$, másrészt a $u - r < x < u < y < u + r$ feltételeknek eleget tevő (x, y) párok mindegyikére

$$f(x) < T_{u,1}^f(x) \quad \text{és} \quad f(y) > T_{u,1}^f(y), \quad \text{illetve} \quad f(x) > T_{u,1}^f(x) \quad \text{és} \quad f(y) < T_{u,1}^f(y).$$

A gyengébb értelemben vett inflexiós pont esetében tehát arról van szó, hogy f grafikonja az $(u, f(u))$ pontban átmetszi az e pontban a grafikonhoz húzott érintőt.

11.14. Állítás. Ha u inflexiós pontja f -nek, akkor gyengébb értelemben vett inflexiós pontja is az f -nek.

Bizonyítás. A szigorúan konvex/konkáv függvények különbséghányados-függvényeinek szigorúan monoton növekvő/fogyó voltából következik, hogy ha u inflexiós pontja f -nek, akkor az

$$\left[\frac{f(x) - f(u)}{x - u} - f'(u) \right] (x - u) \left(= f(x) - f(u) - f'(u)(x - u) = f(x) - T_{u,1}^f(x) \right)$$

szorzat első tényezőjének előjele u egy pontozott környezetén belül állandó és nem nulla: ha f az $(u-r, u]$ intervallumon szigorúan konkáv és az $[u, u+r)$ intervallumon szigorúan konvex, akkor ez az előjel pozitív, a másik esetben negatív, így az u r sugarú környezetéből vett x számokra $f(x) - T_{u,1}^f(x)$ előjele az első esetben megegyezik $x - u$ előjével, a második esetben az $x - u$ előjével ellentétes. Ebből következik, hogy az $f - T_{u,1}^f$ függvény az első esetben szigorúan növekvő, a második esetben szigorúan fogyó az u pontban. $\square$

11.15. Tétel. Legyen n 1-nél nagyobb egész, f az u pont egy környezetében $n-1$ -szer, magában az u pontban n -szer differenciálható, továbbá tegyük fel, hogy minden $i \in \overline{2, n-1}$ esetén $f^{(i)}(u) = 0$.

1. Ha u gyengébb értelemben vett inflexiós pontja az f -nek és n páros, akkor $f^{(n)}(u) = 0$,
2. Ha n páratlan és $f^{(n)}(u) \neq 0$, akkor u inflexiós pontja az f -nek.

Bizonyítás. 1. A lokális Taylor-formula, illetve a többszörös-gyök-feltétel szerint

$$f^{(n)}(u) = n! \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - T_{u,n-1}^f(x)}{(x-u)^n} = n! \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x) - f(u) - f'(u)(x-u)}{(x-u)^n}.$$

A gyengébb értelemben vett inflexiós pont definíciójából következik, hogy az utolsó $\lim_{x \rightarrow u}$ jelet követő szorzat első tényezője u -ban előjelet vált, a második tényező előjele viszont u egy pontozott környezetén belül állandó és nem nulla, így a szorzat határértékének létezéséből, illetve ennek ama következményéből, hogy a bal oldali határérték megegyezik a jobb oldali határértékkel, azt kapjuk, hogy ez a határérték nulla.

2. A potbeli szigorú növekedés/fogyás n -edrendű elégséges feltétele (9.8.3.) szerint az f'' függvény az u pontban szigorúan lokálisan növekvő, illetve fogyó – attól függően, hogy $f^{(n)}(u)$ pozitív, vagy negatív. Azaz van olyan r pozitív szám, melyre $f''(x)$ előjele az első esetben az $(u-r, u)$ -beli x -ekre negatív és az $(u, u+r)$ -beli x -ekre pozitív, a második esetben fordítva, így az első esetben $f|_{(u-r, u]}$ szigorúan konkáv és $f|_{[u, u+r)}$ konvex, a második esetben fordítva. $\square$

12. A trigonometrikus függvények és a π szám

A koszinusz- és a szinuszfüggvény, valamint a π szám értelmezésére és néhány alapvető tulajdonságának igazolására a középiskolában geometriai módszereket szoktak használni. Ennek a tárgyalásmódnak egy precízebb változata tanulmányozható például Császár Ákos Valós Analízis című tankönyvének I.4.54. szakaszában (ez az I. kötet 138. oldalán kezdődik és a 142. oldalán fejeződik be).

A koszinusz- és a szinuszfüggvény néhány ismert tulajdonságából most összeállítunk egy olyan minimális elemszámú feltételrendszert, amely elvileg alkalmas a $(\cos, \sin)$ függvenypár definiálására. Ez a feltételrendszer $(C, S) \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ függvenypárookra vonatkozik, és az alábbi négy feltételt tartalmazza:

- $$\begin{aligned} (a) \quad & \forall x \in \mathbf{R} \quad C^2(x) + S^2(x) = 1, \\ (b) \quad & \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \\ (c) \quad & \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \\ (d) \quad & \exists r \in \mathbf{R}^+ \quad \forall x \in (0, r) \quad 0 < C(x) \quad \text{és} \quad 0 < S(x) < x < S(x)/C(x). \end{aligned}$$

Az a tény, hogy létezik olyan függvenypár, amelyik teljesíti ezt a négy feltételt, szinte közismertnek nevezhető (miként az is, hogy a legnagyobb olyan r pozitív szám, amellyel a (d) feltétel teljesül, $\pi/2$ -vel egyenlő). Geometriai eszközökkel történő bizonyítása megtalálható az imént említett könyvrészletben, de ismert több geometriamentes bizonyítása is, ezek közül az egyikkel fogunk megismerkedni.

Lényegesen szűkebb körben ismert viszont, hogy a $(C, S) = (\cos, \sin)$ pár az *egyetlen* ilyen függvenypár. Az, hogy *legfeljebb* egy ilyen pár létezhet, kiolvasható az alábbi tétel (l) állításából, míg annak a bizonyítását, hogy *létezik* ilyen függvenypár, a hatványsorok tárgyalása során fogjuk befejezni. Hangsúlyozzuk, hogy a koszinusz-szinusz függvenypár bevezetésével együtt sor kerül a π szám ugyancsak geometriamentes bevezetésére is.

12.1. Tétel (a trigonometrikus függvények néhány tulajdonsága). Ha egy $(C, S) \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ függvenypár teljesíti a fenti (a), (b), (c), (d) feltételeket, akkor az alábbiakat is teljesíti:

- (e) $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, (f) C páros, S páratlan függvény,
- (g) bármely (u, v) valós számpárra

$$C(v) - C(u) = -2S\left(\frac{v+u}{2}\right)S\left(\frac{v-u}{2}\right) \quad \text{és} \quad S(v) - S(u) = 2C\left(\frac{v+u}{2}\right)S\left(\frac{v-u}{2}\right),$$

- (h) C folytonos a 0 helyen,
 (i) S differenciálható a 0 helyen és $S'(0) = 1$,
 (j) C is, S is folytonos függvény,
 (k) C is, S is differenciálható függvény, minden $u \in \mathbf{R}$ esetén $C'(u) = -S(u)$, és $S'(u) = C(u)$
 (l) minden valós v -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{v^{2k}}{(2k)!} = C(v) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{v^{2k+1}}{(2k+1)!} = S(v),$$

(m) azok között az r pozitív számok között, amelyekre teljesül a (d) feltétel, van legnagyobb, ez a C függvény legkisebb pozitív gyöke,

ennek kétszeresét π -vel jelölve,

- (n) S a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, C a $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, S/C a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, és C/S a $(0, \pi)$ intervallumon szigorúan monoton fogyó;
 (o) a C , S függvények 2π szerint, míg az S/C , C/S függvények π szerint periodikusak.

Bizonyítás. (e) Ha (b)-t és (a)-t az $x := y := 0$ szereposztással alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy a $k := C(0)$ szám a $2\text{id}^2 - \text{id} - 1$ polinomfüggvény egyik gyöke, vagyis $k = 1$ vagy $k = -1/2$. Indirekt úton folytatjuk: tegyük fel, hogy $k = -1/2$. Ebből és (a)-ból ($x = 0$) azt kapjuk, hogy $S(0) \neq 0$, így a (c)-ből az $x := y := 0$ szereposztással adódó $S(0) = 2S(0)C(0)$ egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk az $S(0)$ számmal, tehát azt kapjuk, hogy $-1 = 2k = 1$. $k = 1$ -ből és (a)-ból persze rögtön következik, hogy $S(0) = 0$.

(f) Minden valós x számra

$$[C(x) - C(-x)]^2 + [S(x) + S(-x)]^2 \stackrel{(a)}{=} 2 - 2C(x)C(-x) + 2S(x)S(-x) \stackrel{(b)}{=} 2 - 2C(-x + x) = 2 - 2C(0) \stackrel{(e)}{=} 0.$$

(g) A középiskolában megismert módon az $x := (v + u)/2$, $y := \pm(v - u)/2$ szereposztásokkal kaphatjuk (b)-ből az első, (c)-ből a második azonosságot.

(h) Ha az imént bizonyított azonosságok közül az első olyan (u, v) párokra alkalmazzuk, amelyek teljesítik a $0 \leq u < v < \delta$ egyenlőtlenségeket, akkor arra következtethetünk, hogy C szigorúan monoton fogyó a $[0, \delta)$ intervallumon, hiszen ilyen (u, v) párok esetén $(v + u)/2$ és $(v - u)/2$ egyaránt benne van a $(0, \delta)$ intervallumban, így (d) miatt S értéke ezeken a helyeken pozitív. Ennek a leszűkített függvénynek a monotonitása miatt C -nek létezik a 0 helyen a jobb oldali határértéke. A C függvény páros volta miatt ez az A jobb oldali határérték egyszermind a határértéke is a C függvénynek, így azt kell bizonyítanunk, hogy $A = 1$. (d)-ből következik, hogy A nem lehet negatív, ezért elég azt igazolni, hogy $A \in \{-1/2, 1\}$, vagyis elég azt igazolni, hogy A gyöke a $2\text{id}^2 - \text{id} - 1$ polinomfüggvénynek. A második és a harmadik szakasz egyszerű tételeiből következik, hogy az $x \mapsto 2C^2(x) - C(2x) - 1$ függvény határértéke a 0 helyen $2A^2 - A - 1$, viszont a (b) és (a) feltételek szerint ($y := x$) ez az azonosan nulla függvény, így határértéke 0.

(i) Legyen ε tetszőleges pozitív szám. A C függvény 0-beli folytonossága miatt vehetünk egy olyan $\delta \in (0, r]$ pozitív számot, melyre minden $x \in (0, \delta)$ esetén $1 - \varepsilon < C(x) \leq 1$. Ezek után a (d) feltételből következik, hogy ezekre az x számokra

$$1 - \varepsilon < C(x) < \frac{S(x)}{x} < 1,$$

végül az S/id függvény páros voltából következik (lásd (f)-t), hogy ezek az egyenlőtlenségek akkor is teljesülnek, ha $x \in (-\delta, 0)$.

(j) S páratlan, így (d)-ből következik, hogy minden $x \in (-r, r)$ esetén $|S(x)| \leq |x|$. Legyen $u \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, és legyen v az u középpontú, $\min\{r, \varepsilon\}$ környezet tetszőleges eleme. Ekkor – felhasználva egyrészt a (g) azonosságokat, másrészt azt, hogy (a) következtében mind a C , mind az S függvény értékkészlete rész a $[-1, 1]$ intervallumnak –

$$|C(v) - C(u)| = 2 \left| S\left(\frac{v+u}{2}\right) \right| \cdot \left| S\left(\frac{v-u}{2}\right) \right| \leq |v-u| < \varepsilon,$$

$$|S(v) - S(u)| = 2 \left| C\left(\frac{v+u}{2}\right) \right| \cdot \left| S\left(\frac{v-u}{2}\right) \right| \leq |v-u| < \varepsilon.$$

(k) Ismét a (g) azonosságokat alkalmazzuk.

$$\frac{C(x) - C(u)}{x - u} = -\frac{S\left(\frac{x-u}{2}\right)}{\frac{x-u}{2}} \cdot S\left(\frac{x+u}{2}\right),$$

itt a jobb oldal első tényezőjének határértéke az u helyen 1, hiszen ez az S/id külső, és az injektív $x \mapsto (x-u)/2$ belső függvény kompozíciója és a belső függvény határértéke az u helyen 0, a második tényező $S(u)$, mert ez a folytonos S külső, és az $x \mapsto (x+u)/2$ belső függvény kompozíciója és a belső függvény határértéke az u helyen u -val egyenlő.

$$\frac{S(x) - S(u)}{x - u} = \frac{S\left(\frac{x-u}{2}\right)}{\frac{x-u}{2}} \cdot C\left(\frac{x+u}{2}\right),$$

itt a jobb oldal első tényezőjének határértéke az u helyen 1, hiszen ez az S/id külső, és az (injektív) $x \mapsto (x-u)/2$ belső függvény kompozíciója és a belső függvény határértéke az u helyen 0, a második tényező $C(u)$, mert ez a (folytonos) C külső és az injektív $x \mapsto (x+u)/2$ belső függvény kompozíciója, és a belső függvény határértéke az u helyen u -val egyenlő.

(l) Az állítás $v = 0$ esetén nyilvánvaló, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $v \neq 0$. (k)-ból következik, hogy mind a C , mind az S függvény kétszer differenciálható, és $C'' = -C$, $S'' = -S$, ebből az, hogy C is, S is háromszor differenciálható, és $C''' = S$, $S''' = -C$, ebből pedig az, hogy mind a C , mind az S négyszer differenciálható, és $C^{(4)} = C$, $S^{(4)} = S$. Ezek után egyszerű teljes indukcióval adódik, hogy minden pozitív egész n -re mind a C , mind az S függvény $4n-3$ -szor is, $4n-2$ -ször is, $4n-1$ -szer is és $4n$ -szer is differenciálható (így mindkét függvény végtelen sokszor differenciálható), továbbá hogy minden valós u -ra mind az $n \mapsto C^{(n)}(u)$, mind az $n \mapsto S^{(n)}(u)$ sorozat 4 szerint periodikus, és mindkét sorozat abszolút értéke 2 szerint periodikus. Ebből ($u := 0$) azt kapjuk, hogy a bizonyítandó állítások így fogalmazhatók át: $\lim_{n \rightarrow \infty} |C(v) - T_{0,2n}^C(v)| = 0$, illetve $\lim_{n \rightarrow \infty} |S(v) - T_{0,2n+1}^S(v)| = 0$. A Lagrange-maradéktagos Taylor-formula szerint minden pozitív egész n -hez található a 0 és a v között olyan w_n , melyre

$$|C(v) - T_{0,2n}^C(v)| = \frac{|C^{(2n+1)}(w_n)| |v|^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{|v|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(az utolsó egyenlőtlenség abból következik, hogy a $|C^{(2n+1)}| = |S|$ függvény minden értéke a $[0, 1]$ intervallumban van), és a majoráns sorozat nullsorozat, hiszen egy $(x^n/n!)$ alakú sorozat részsorozata. Az $(|S(v) - T_{0,2n+1}^S(v)|)$ sorozat nullához tartása ugyanígy igazolható, a maradéktagban ezúttal a $|S^{(2n+2)}|$ függvény szerepel, de ez is megegyezik az $|S|$ függvénnyel.

(m) Jelölje A azoknak az r pozitív számoknak a halmazát, amelyekre minden $x \in (0, r)$ esetén $C(x) > 0$, míg B azokat, amelyekre teljesül (d). (d) értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $B \subset A$, most igazoljuk, hogy $A \subset B$. Ehhez már használhatjuk azt a tényt, hogy a vizsgált (C, S) függvénpárunk teljesíti a (k) feltételt. Abból, hogy $S(0) = 0$ és minden $x \in [0, r)$ esetén $S'(x) = C(x) > 0$, következik, hogy $S|_{[0, r)}$ szigorúan monoton növekvő, így az S függvény a $(0, r)$ intervallumon valóban csak pozitív értékeket vesz fel. Ebből, és a $C^2 + S^2 = 1$ azonosságból kapjuk, hogy C a $(0, r)$ intervallumon mindenütt 1-nél kisebb (és -1 -nél nagyobb) értéket vesz fel, vagyis itt a 0 helyen is folytonos $x \mapsto x - S(x)$ függvény deriváltja pozitív, aminek köszönhetően ez a függvény a $[0, r)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, következésképp a $(0, r)$ intervallumon csak pozitív értékeket vesz fel. Ugyanígy bizonyíthatjuk az utolsó egyenlőtlenséget is, ezúttal elég az $x \mapsto S(x)/C(x) - x$ függvényről bizonyítani, hogy a deriváltja a $(0, r)$ intervallum minden pontjában pozitív: ez a derivált egy $x \in (0, r)$ pontban $(C^2(x) + S^2(x))/C^2(x) - 1 = 1/C^2(x) - 1$, és mint azt az imént láttuk, $|C(x)| < 1$.

Mármint $(\sup B =) \sup A \in A (= B)$ igazolása céljából csak annyit kell megjegyezni, hogy egy $\sup A$ -nál kisebb x pozitív szám esetén $C(x)$ azért pozitív, mert – a felső határ definíciója szerint – van x -nél nagyobb A -beli elem.

Most azt igazoljuk, hogy a C függvény értékkészletének alsó határa negatív. Ez egyenértékű egyrészt azzal, hogy van negatív szám az értékkészletében, másrészt C páros volta ((f)) és $C(0) = 1 > 0$ ((e)) miatt azzal is, hogy C a pozitív számok halmazán felvesz negatív értéket is, amiből persze következik, hogy az $A (= B)$ halmaz felső határa pozitív valós szám. Indirekt úton okoskodunk: tegyük fel, hogy $i := \inf R(C) \geq 0$, legyen ε tetszőleges pozitív szám, u pedig olyan valós szám, melyre $0 \leq i \leq C(u) \leq i + \varepsilon$. Ekkor (b)-ből, (a)-ból és az alsó határ definíciójából következik, hogy $i \leq C(2u) = 2C^2(u) - 1 \leq 2(i + \varepsilon)^2 - 1$. Az $\varepsilon \mapsto 2(i + \varepsilon)^2 - i - 1$ polinomfüggvény folytonossága miatt, és pedig a 0-beli előjeltartása miatt ebből azt kapjuk, hogy $0 \leq 2i^2 - i - 1 = (2i + 1)(i - 1)$, tehát (tekintettel az indirekt feltevésre) $i \geq 1$, ebből $R(C) \subset [-1, 1]$ miatt adódik, hogy C az azonosan 1 függvény, így (a) miatt S az azonosan nulla függvény, ami ellentmond (d)-nek.

Végül $C(\sup A) = 0$ -ra indirekt úton lehet következtetni abból, hogy (a folytonos) C függvény lokálisan előjeltartó a $\sup A$ pontban: emiatt $C(\sup A) > 0$ esetén létezne olyan $\delta > 0$, melyre C értéke minden $(0, \sup A + \delta)$ -beli helyen pozitív lenne, vagyis az A halmaznak lenne $\sup A$ -nál nagyobb eleme, ha pedig $C(\sup A) < 0$ lenne, akkor $\sup A$ nem lehetne eleme az A -nak.

(n) A bizonyítás (m) részének első bekezdése ismételtető az $r = \pi/2$ szereposztással.

(o) Abból, hogy $\pi/2$ gyöke a C függvénynek, először (a) és (b) segítségével kapjuk azt, hogy $C(\pi) = 2C^2(\pi/2) - 1 = -1$, (c) segítségével azt, hogy $S(\pi) = 2S(\pi/2)C(\pi/2) = 0$, az utóbbiakból (b) és (c) felhasználásával azt, hogy minden

valós x -re $C(x + \pi) = -C(x)$ és $S(x + \pi) = -S(x)$. Az utóbbiakból egy osztással kapjuk az S/C függvényre vonatkozó állítás bizonyítását, illetve külön-külön kétszer alkalmazva őket, kapjuk a 2π szerinti periodicitásra vonatkozó állításokét. $\square$

Az alábbi tételt a hatványsorok tárgyalása során bizonyítjuk:

12.2. Tétel. Minden valós x esetén léteznek az alábbi határértékek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} =: \cos x \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =: \sin x,$$

az így értelmezett $\cos$, $\sin$ függvények differenciálhatók, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$.

A következő tételből kiderül, hogy ilyen módon valóban a kívánt függvényeket értelmezzük:

12.3. Tétel. Ha az összes valós számok halmazát önmagába képező C , S függvények teljesítik az (e), (k) feltételeket, akkor teljesítik az (a), (b), (c), (d) feltételeket is.

Bizonyítás. (a) Minthogy a $C^2 + S^2$ függvény a 0 helyen (e) szerint az $1^2 + 0^2 = 1$ értéket veszi fel és a deriváltja minden valós x helyen egyenlő $-2C(x)S(x) + 2S(x)C(x) = 0$ -val, ez a függvény szükségképpen az azonosan 1 függvény.

(b) és (c) igazolása céljából elég azt bizonyítani, hogy minden valós y esetén az

$$R \ni x \mapsto [C(x)C(y) - S(x)S(y) - C(x+y)]^2 + [S(x)C(y) + C(x)S(y) - S(x+y)]^2 =: f_y(x)$$

függvény az azonosan nulla függvény. f_y azonosan nulla volta abból következik, hogy egyrészt $f_y(0) = [C(y) - C(y)]^2 + [S(y) - S(y)]^2 = 0$, másrészt – miként az (k) alapján könnyen ellenőrizhető – f'_y azonosan nulla.

(d) bizonyításában az r pozitív számot válasszuk úgy, hogy a 0 szám r sugarú környezetében minden valós x -re $C(x) > 0$ legyen. Ilyen szám a valamely pontban folytonos függvény lokális előjeltartásáról szóló tétel szerint létezik, hiszen $C(0) = 1 > 0$, és C differenciálható a 0 helyen. Innentől kezdve a 12.1. Tétel (m) részének bizonyításából lehet másolni egy részt: annak a bizonyítását, hogy (lásd az ottani jelöléseket) $A \subset B$. $\square$

A koszinusz- és a szinuszfüggvény definícióját követheti természetesen a tangens- és a kotangensfüggvény értelmezése: $\tan := \text{tg} := \sin / \cos$, $\cot := \text{ctg} := \cos / \sin$.

A 12.1. Tétel (n) állítására alapozva be lehet vezetni az arkuszfüggvényeket:

$$\arccos := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}, \quad \arcsin := (\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]})^{-1}, \quad \text{arctg} := (\text{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)})^{-1}, \quad \text{arcctg} := (\text{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1},$$

melyeket – kissé pongyola szóhasználattal – a trigonometrikus függvények inverzeinek szoktak nevezni.

Számos apró állítást lehetne még bizonyítani a trigonometrikus függvényekről, de mi most már csak egy dolgot nézünk meg részletesen, azt, hogy mit lehet állítani differenciálhatóság szempontjából a tangens és a kotangens függvényről, továbbá a trigonometrikus függvények inverzeiről:

12.4. Tétel. A tangens- és a kotangensfüggvény differenciálható, minden $u \in D(\text{tg})$, illetve $u \in D(\text{ctg})$ esetén $\text{tg}'(u) = 1/\cos^2 u$ és $\text{ctg}'(u) = -1/\sin^2 u$.

Bizonyítás. A 2.2. Tételből és az előző lemmából következik a differenciálhatóság ténye és a két formula érvényessége is:

$$\begin{aligned} \text{tg}'(u) &= \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}, \\ \text{ctg}'(u) &= \frac{-\sin^2 u - \cos^2 u}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u}. \end{aligned} \quad \square$$

12.5. Állítás. Az $\arcsin$ és $\arccos$ függvények minden $u \in (-1, 1)$ pontban differenciálhatók,

$$\arcsin'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos'(u),$$

továbbá $\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = +\infty$ és $\arccos'_+(-1) = \arccos'_-(1) = -\infty$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az inverz deriváltjáról szóló tételt (3.4.) a $g := \sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$, és a $g := \cos|_{[0, \pi]}$ függvényre, legyen először $v := \arcsin u$, illetve $v := \arccos u$, másodszor $v := -1$, harmadszor $v := 1$. Minthogy a $\cos$ függvény a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumon és a $\sin$ függvény a $[0, \pi]$ intervallumon csak nemnegatív értékeket vesz fel,

$$\frac{1}{\arcsin'(u)} = \cos v = \sqrt{1 - \sin^2 v} = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin u))^2} = \sqrt{1 - u^2},$$

illetve

$$\frac{1}{\arccos'(u)} = -\sin v = -\sqrt{1 - \cos^2 v} = -\sqrt{1 - (\cos(\arccos u))^2} = -\sqrt{1 - u^2},$$

innen reciprokokra áttérve adódik az első két állítás.

A végpontokban vett egy oldali deriváltakra vonatkozó állítások közvetlenül következnek a 3.4. Tételből, hiszen a $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ függvény szigorúan monoton növekvő, deriváltja a két végpontban nulla, a $\cos|_{[0, \pi]}$ függvény szigorúan monoton fogyó és a deriváltja a két végpontban nulla. $\square$

12.6. Megjegyzés. Hasonlóan bizonyítható a következő állítás is (a bizonyítást a Kedves Olvasó feltétlenül gondolja végig): minden $u \in \mathbf{R}$ esetén

$$\arctg'(u) = \frac{1}{1 + u^2} = -\operatorname{arccotg}'(u).$$