

Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

A következő alakú (alakra hozható) differenciálegyenlet-rendszereket hívjuk elsőrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszereknek:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mátrixos jelöléssel:

$$\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y}, \quad (2)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \underline{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Egy megoldási módszer: Ha a $\underline{v}$ vektor a λ sajátértékhez tartozós sajátvektor (azaz $\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$ és $\underline{v} \neq \underline{0}$), akkor a

$$\underline{y}(t) = e^{\lambda x}\underline{v} \quad (4)$$

megoldása az (1) differenciálegyenlet-rendszernek.

Mivel (1) lineáris ezért elég találni n darab (lineárisan) független megoldást. Legyenek az $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n$ függvények n darab független megoldása (1)-nek, ez esetben az általános megoldás

$$\underline{y} = c_1\underline{y}_1 + c_2\underline{y}_2 + \dots + c_n\underline{y}_n \quad (5)$$

alakú, ahol $c_1, c_2, \dots, c_n$ valós konstansok.

Például, ha az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai mind valósak és különbözőek, akkor az $\underline{y}(t) = e^{\lambda x}\underline{v}$ alakban kapott megoldások mind függetlenek.

FELADATOK:

1. Oldja meg a következő differenciálegyenlet-rendszereket:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \left. \begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned} \right\} & \text{b.) } \left. \begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 2y_2 \end{aligned} \right\} & \text{c.) } \underline{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{y} \\ \text{d.) } \left. \begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_2 \end{aligned} \right\} & \text{e.) } \left. \begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= 4y_2 \end{aligned} \right\} & \text{f.) } \left. \begin{aligned} y_1' &= 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

MEGOLDÁSOK:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \left. \begin{aligned} y_1(x) &= 3c_1e^{5x} + c_2e^{-x} \\ y_2(x) &= c_1e^{5x} - c_2e^{-x} \end{aligned} \right\} & \text{b.) } \left. \begin{aligned} y_1 &= c_1e^{3x} + c_2 \\ y_2 &= 2c_1e^{3x} - c_2 \end{aligned} \right\} & \text{c.) } \left. \begin{aligned} y_1 &= 2c_1e^x - 2c_2e^{-3x} \\ y_2 &= c_1e^x + c_2e^{-3x} \end{aligned} \right\} \\ \text{d.) } \underline{y} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x & \text{e.) } \left. \begin{aligned} y_1 &= c_1e^{3x} + 0 \\ y_2 &= 0 + c_2e^{4x} \end{aligned} \right\} & \text{f.) } \left. \begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} - c_2e^{-2x} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$