Gyakorlat anyaga

DETERMINÁNSOK

1. Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét

e.:) $\left|2010\right| = 2010$ ☺

Az a., b-nél számítsuk ki a kifejtési tétel szerint IS!

a. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

c.) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$

c. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} =$

d. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Valamelyik determináns esetében a d.-e. feladatoknál számoltassuk ki a kifejtési tétel szerint, illetve a ferde kifejtési tétel szerint!

e. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 8 & 11 & 5 \end{vmatrix} =$

f. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$

ff. $\begin{vmatrix} 1 & 2010 & 20010 \\ 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ HA a főátló felettiek /alattiak nem nullák, akkor is a főátlóbeliek szorzata

fff= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2010 & -2 & 0 \\ 200 & e & 5 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 8 & 11 & 0 \end{vmatrix}$

i. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ = 0

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos x+1 & 1+\sin x \\ 1 & 1-\sin x & \cos x+1 \end{vmatrix}$ = 1

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

j. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

l. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

k. $\begin{vmatrix} 200 & 100 & 600 & 200 \\ 500 & 0 & -300 & 0 \\ 100 & -300 & 500 & 400 \\ 100 & 400 & 200 & 0 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & o \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \\ 0 & 0 & 1 & j & k & l \\ 0 & 1 & f & g & h & i \\ 1 & a & b & c & d & e \end{vmatrix}$

2. Mikor 0 a következő determinánsok értéke?

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2-x^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ a = 0, ±1

3. Bizonyítsa be, hogy $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x & 1 \\ \sin x & -\cos x & \cos x \\ \cos x & \sin x & \sin x \end{vmatrix}$=0.

4. Oldja meg a következő egyenletet $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=0.

5. Mutassa meg, hogy $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & y+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$.

6. Bizonyítsa, hogy $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & y+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy$.

7. A determináns kifejtése nélkül mutassa meg, hogy $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

8. Számítsa ki det**A**·det**B**-t és det**AB**-t, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

9. A $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ elemek által generált ***Vandermonde-determináns***

$$V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n) = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \cdots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \cdots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \cdots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

10. Határozza meg a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ által generált Vandermonde-determinánst!

a. Fejezze ki $V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ segítségével $(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_3)$ szorzatot!

b. Fejezze ki $V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ segítségével $(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_1-\gamma_3)(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1)$ szorzatot!

c. Hogyan változik a Vandemonde-determináns, ha γ_2-t és γ_3-t felcseréljük?

d. Melyek azok a permutációk, melyekre $V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)= V(\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \gamma_{\sigma(3)})$

11. Általánosítsa a 9. feladat eredményeit $V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,\ldots, \gamma_n)$-re.

Minta:

$$V(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{vmatrix}1 & \gamma_1 & \gamma_1^{\ 2}\\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^{\ 2}\\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^{\ 2}\end{vmatrix}\overset{\substack{\mathrm{O.2}-\gamma_1\mathrm{O.1}\\ \mathrm{O.3}-\gamma_1\mathrm{O.2}}}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \gamma_2-\gamma_1 & \gamma_2^{\ 2}-\gamma_1\gamma_2\\ 1 & \gamma_3-\gamma_1 & \gamma_3^{\ 2}-\gamma_1\gamma_3\end{vmatrix}\overset{\substack{\mathrm{S.2}-\mathrm{S.1}\\ \mathrm{S.3}-\mathrm{S.1}}}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2-\gamma_1 & \gamma_2^{\ 2}-\gamma_1\gamma_2\\ 0 & \gamma_3-\gamma_1 & \gamma_3^{\ 2}-\gamma_1\gamma_3\end{vmatrix}=$$

$$=(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \gamma_2\\ 0 & 1 & \gamma_3\end{vmatrix}=(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & \gamma_2\\ 1 & \gamma_3\end{vmatrix}=(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_1)(\gamma_3-\gamma_2)$$