

## Determinánsok:

Determináns=egy szám:

Egy négyzetes mátrixhoz egy valós számot rendelünk hozzá.  $\underline{A}$  eleme  $T^{n \times n}$

$$\det(\underline{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^o \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

Tehát vesszük minden lehetséges módon kiválasztott előjeles szorzatok összegét:

- minden sorból és oszlopból kiválasztunk pontosan egy elemet és ezeket összeszorozzuk,
- majd a szorzatokat összeadjuk (n db ilyen szorzat van)
- előjel:

$j_1, j_2, j_3, \dots, j_e, \dots, j_k, \dots, j_n$  sorrendben hány olyan pár van ahol:

$j_e > j_k$ , ezek az adott sorrendben az oszlopindexek inverziószáma=o.

(pl: kiválasztom:  $a_{11}, a_{25}, a_{34} \dots$  ekkor  $j_1=1, j_2=5, j_3=4$  és így  $j_2$  és  $j_3$  egy ilyen pár)

pl:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22}}_{(-1)^0} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{(-1)^1}$$

Lemma: Egy adott sorrendben, ha két elemet felcserélünk az inverziók száma párosról páratlanra; páratlanról párosra vált.

Def:  $\sum (-1)^{o'+s'} \cdot a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot a_{i_n j_n} = \sum (-1)^o \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$

→  $s=0$ , mivel a sorindexek a természetes sorrendben követik egymást

ahol  $o'$ : az oszlopindexek inverziója

$s'$ : a sorindexek inverziója

Determinánsok tulajdonságai: (Tételek) (Sorra vagy oszlopra egyaránt igaz)

- 1) Oszlopok és sorok szerepe egyforma (szimmetrikus): a főátlóra tükrözve a determináns értéke nem változik. Azaz  $\det(A) = \det(A^T)$
- 2) A determináns értéke két sorát felcserélve értéke  $(-1)$ szeresére változik.
- 3) Ha a determinánsnak van két egyenlő sora, akkor értéke 0, mivel ekkor  $\det(A) = -\det(A)$  kell legyen, ami csak 0 esetén lesz igaz.
- 4) Ha a determinánsnak egy sora csupa 0-ából áll, akkor értéke 0.
- 5) Ha a determinánsnak egy sorát egy  $\lambda$  számmal szorozzuk, akkor a det értéke  $\lambda$ -szoros lesz. Ebből következik, ha minden sorát megszorozzuk  $\lambda$ -val, a determináns értéke a  $\lambda^n$ -nel szorzódik, ahol  $n$  a mátrix mérete:  $\det(\lambda * A) = \lambda^n * \det(A)$ , ahol  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- 6) Ha a determináns főátlója alatt (v. fölött) csak 0-ák állnak, akkor a determináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata. Ez a helyzet diagonális mátrixnál is, nemcsak a felső-/alsóháromszög mátrix esetében. (Ezt nevezzük a mátrix nyomának, azaz Trace-nek, jele:  $\text{Tr}(A)$ .)
- 7) Ha a determináns egyik sora egy kéttagú összeg, akkor a determináns értéke a két olyan determináns értékének összege, melyeknek az egyik sora a kéttagú összeg egyik ill. másik fele.
- 8) A determináns értéke nem változik, ha egy sorához hozzáadjuk valamelyik másik sorának szám szorosát.

Aldetermináns:

$$\begin{array}{|c|cccc|}
 \hline
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
 \hline
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \\
 \hline
 \end{array}$$



az  $a_{11}$ -hez tartozó alldetermináns:  $\underline{A}_{11}$

$\underline{D}_{11}$ :  $a_{11}$ -hez tartozó előjeles alldetermináns

Kifejtési tétel:

A determináns értéke megadható úgy is, hogy egy tetszőleges sor (vagy oszlop) elemeit szorzuk a hozzájuk tartozó alldeterminánsokkal és ezeket előjelesen összedadjuk.

$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \cdot D_{ik} \rightarrow$  a  $k$ -adik oszlop elemei szorozva a hozzájuk tartozó előjeles alldeterminánsokkal (a  $k$  rögzített): a  $k$ -adik oszlop szerinti kifejtés

Tehát kisebb mátrixok számolásához:

Első sor szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} a, b, c \\ d, e, f \\ g, h, i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e, f \\ h, i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d, f \\ g, i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d, e \\ g, h \end{vmatrix} = a(e \cdot i - f \cdot h) - b(d \cdot i - f \cdot g) + c(d \cdot h - e \cdot g)$$

Érdemes a legtöbb 0-t tartalmazó sor vagy oszlop szerint kifejtteni a determinánst.

## PÉLDÁK

0.

$$\text{Det}(E)=1.$$

1. (1.tulajdonság)

$$\begin{vmatrix} 5,3 \\ 8,7 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 5,8 \\ 3,7 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1,-2,0 \\ 5,4,7 \\ 1,6,2 \end{vmatrix} = 1(8-42) - (-2)(10-7) + 0(\dots) = -34 + 6 = -28$$

$$\begin{vmatrix} 1,5,1 \\ -2,4,6 \\ 0,7,2 \end{vmatrix} = (8-42) - 5(-4+0) + (-14+0) = -34 + 20 - 14 = -28$$

2. (2.tulajdonság)

$$\begin{vmatrix} 1,3 \\ 4,14 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4,14 \\ 1,3 \end{vmatrix} = 12 - 14 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 6,0,8 \\ 9,2,3 \\ 4,7,1 \end{vmatrix} = 6(2-21) + 8(63-8) = -114 + 440 = 326$$

$$\begin{vmatrix} 6,0,8 \\ 4,7,1 \\ 9,2,3 \end{vmatrix} = 6(21-2) + 8(8-63) = -326$$

3. (3.tul.)

$$\begin{vmatrix} 1,2,4 \\ 1,2,4 \\ 5,3,2 \end{vmatrix} = 1(4-12) - 2(2-20) + 4(3-10) = -8 + 36 - 28 = 0$$

4.(4.tul.)

$$\begin{vmatrix} 0,0,0,0,0 \\ 1,4,8,-9,6 \\ 0,5,2,1,7 \\ 6,5,0,-3,-3 \\ 2,2,1,-8,0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 - 0 + 0 = 0 \text{ Bárhogy nézzük, az összeadandó szorzatokban}$$

mindig lesz legalább egy db 0.

5.(5.tul.)

$$\begin{vmatrix} \lambda 1, \lambda 2 \\ 3,4 \end{vmatrix} = (\lambda 1 * 4) - (\lambda 2 * 3) = \lambda(1 * 4 - 2 * 3) = \lambda \begin{vmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda 1, \lambda 2 \\ \lambda 3, \lambda 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{vmatrix}$$

6.(6. tul.)

$$\begin{vmatrix} 1,2,3 \\ 0,2,3 \\ 0,0,3 \end{vmatrix} = 1 * 2 * 3 = 3! \text{ Mellékátlókra is igaz: } \begin{vmatrix} 0,2 \\ 4,6 \end{vmatrix} = 2 * 4 = 8$$

7.(7.tul.)

$$\begin{vmatrix} 1+3,2+4,5+2 \\ -3,1,6 \\ 0,9,-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,2,5 \\ -3,1,6 \\ 0,9,-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3,4,2 \\ -3,1,6 \\ 0,9,-2 \end{vmatrix} = [1(-2-54) - (-3)(-4-45) + 0] + [3(-2-54) - (-3)(-8-18) + 0] = -56 - 147 - 168 - 78 = -449$$

$$\begin{vmatrix} 4,6,7 \\ -3,1,6 \\ 0,9,-2 \end{vmatrix} = 4(-2-54) - (-3)(-12-63) + 0 = -224 - 225 = -449$$

8.(8.tul.)

$$\begin{vmatrix} 1,3,6 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} = -2(9-30) = 42$$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda 4,3+\lambda 5,6+\lambda 3 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,3,6 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda 4, \lambda 5, \lambda 3 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,3,6 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 4,5,3 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,3,6 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} + \lambda * 0 = \begin{vmatrix} 1,3,6 \\ 2,0,0 \\ 4,5,3 \end{vmatrix} = 42$$

9. Kifejtési tétel

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot D_{jk} = \begin{cases} \det(A), \text{ ha } i = j, \text{ a helyes kifejtés} \\ 0, \text{ ha } i \neq j, \text{ azaz ferde kifejtés} \end{cases}$$

Első sor szerinti helyes kifejtés:

$$\begin{vmatrix} 4,1,-8 \\ -6,-5,3 \\ 7,13,-10 \end{vmatrix} = 4(5 \cdot 10 - 3 \cdot 13) - 1(6 \cdot 10 - 3 \cdot 7) - 8(-6 \cdot 13 + 5 \cdot 7) = 4(11) - (39) - 8(-78 + 35) = 44 - 39 + 344 = 349$$

Ferde-kifejtéssel:

a: 1. sor elemei \* 2. sorhoz tartozó aldeterminánsok

$$\begin{vmatrix} 4,1,-8 \\ -6,-5,3 \\ 7,13,-10 \end{vmatrix} = 4(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1,-8 \\ 13,-10 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4,-8 \\ 7,-10 \end{vmatrix} + (-8)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4,1 \\ 7,13 \end{vmatrix} = 4(-10 + 104) - (-40 + 56) - 8(52 - 7) = 4 \cdot 94 - 16 - 8 \cdot 45 = 376 - 16 - 360 = 0$$

b: 2.oszlophoz elemei \* 1. oszlop aldeterminánása

$$\begin{vmatrix} 4,1,-8 \\ -6,-5,3 \\ 7,13,-10 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5,3 \\ 13,-10 \end{vmatrix} + (-5)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4,-8 \\ 7,-10 \end{vmatrix} + (13)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4,1 \\ -5,3 \end{vmatrix} = -1(50 - 39) - 5(-10 + 104) - 13(3 - 40) = -11 - 470 + 481 = 0$$

Stb.

10.

$$\begin{vmatrix} \cos x, -\sin x \\ \sin x, \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

11.

A mátrix függőleges tengelyére vett tükrözés.

$$\begin{vmatrix} 1,2 \\ 3,4 \end{vmatrix} = -2$$

2 x 2-esnél -1-szerese lesz a determináns.

$$\begin{vmatrix} 2,1 \\ 4,3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1,2-3 \\ 5-9-8 \\ 1,1,0 \end{vmatrix} = -1(8) - 2(8) - 3(5+9) = -8 - 16 - 42 = -66$$

3 x 3-asnál -1-szeresére változik.

$$\begin{vmatrix} -3,2,-1 \\ -8,-9,5 \\ 0,1,1 \end{vmatrix} = -1(-15-8) + 1(27+16) = 23 + 43 = 66$$

$$\begin{vmatrix} 3,0,0,5 \\ 0,8,9,-1 \\ 2,3,1,1 \\ 0,4,0,-1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8,9,-1 \\ 3,1,1 \\ 4,0,-1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0,8,9 \\ 2,3,1 \\ 0,4,0 \end{vmatrix} = 3[4(9+1) - (8-27)] - 5[0-8(0)+9(8)] = 3(40+19) - 5(72) =$$

$$= 177 - 360 = -183$$

$$\begin{vmatrix} 5,0,0,3 \\ -1,9,8,0 \\ 1,1,3,2 \\ -1,0,4,0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 9,8,0 \\ 1,3,2 \\ 0,4,0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1,9,8 \\ 1,1,3 \\ -1,0,4 \end{vmatrix} = 5[-2(36)] - 3[-1(27-8) + 4(-1-9)] = 5(-72) - 3(-19-40) =$$

$$= -360 + 177 = -183$$

4 x 4-esnél a determináns értéke nem változik.

$$\det(A) = \begin{cases} -\det(A'), & \text{ha } n/2 \text{ egészrésze páratlan} \\ \det(A'), & \text{ha } n/2 \text{ egészrésze páros} \end{cases}$$

ahol  $A'$  az  $A$  mátrix függőleges tengelyére vett tükrözés, és  $A \in R^{n \times n}$

12.

Ha a mátrix túl nagy, érdemes direkt kifejtés helyett Gauss-eliminálni.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2 \cdot I. \text{ sor} \\ -4 \cdot I. \text{ sor} \\ -8 \cdot I. \text{ sor} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 12 & 21 \\ 0 & 19 & 56 & 117 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -5 \cdot II. s \\ -19 \cdot II. s \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 60 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -9 \cdot III. s \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6$$

$$= 12$$

13.

$$\begin{vmatrix} 3 & 23 \\ -52 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 23 \cdot (-52) = 1214$$

14.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 2] - 3 \cdot [1 \cdot 1 - 0 \cdot 3] + 4 \cdot [1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3] \\ = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = -1 - 3 + 20 = 16$$

15.

$$\begin{vmatrix} -3,1,1,1 \\ 1,-3,1,1 \\ 1,1,-3,1 \\ 1,1,1,-3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \\ 0,0,0,0 \end{vmatrix} = 0 \text{ Minden sorhoz hozzáadjuk a többbit.}$$

16.

$$\begin{vmatrix} 1,1,1,1,1 \\ 1,1,-1,-1,-1 \\ 1,-1,1,1,-1 \\ 1,1,-1,1,-1 \\ -1,-1,1,1,-1 \end{vmatrix} = 16$$

17. Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{n-1} \\ \alpha_2^0, \alpha_2^1, \dots, \alpha_2^{n-1} \\ \dots \\ \alpha_n^0, \alpha_n^1, \dots, \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Egy példán:

$$\begin{vmatrix} 1,2,4,8 \\ 1,10,100,1000 \\ 1,5,25,125 \\ 1,4,16,64 \end{vmatrix} = (4-5)(5-10)(10-2) = (-1)(-5)(8) = 40$$

17. Cramer-szabály (1.példa)

$$3x - 5y + 8z = 17$$

$$-9x + 7y = 5$$

$$6x + 6y - 2z = 12$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3, -5, 8 \\ -9, 7, 0 \\ 6, 6, -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{marad} \\ +3\text{szorI} \\ -2\text{szerI} \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 3, -5, 8 \\ 0, -8, 24 \\ 0, 16, -18 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{marad} \\ \text{marad} \\ +2 \cdot \text{II} \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 3, -5, 8 \\ 0, -8, 24 \\ 0, 0, 30 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-8) \cdot 30 = -720$$

x keresése:

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 17, -5, 8 \\ 5, 7, 0 \\ 12, 6, -2 \end{vmatrix} = 8(30 - 84) - 2(119 + 25) = -432 - 288 = -720$$

$$x = \frac{\det(X)}{\det(A)} = \frac{-720}{-720} = 1$$

y keresése:

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} 3, 17, 8 \\ -9, 5, 0 \\ 6, 12, -2 \end{vmatrix} = 8(-108 - 30) - 2(15 + 153) = -1104 - 336 = -1440$$

$$y = \frac{\det(Y)}{\det(A)} = \frac{-1440}{-720} = 2$$

z keresése:

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} 3, -5, 17 \\ -9, 7, 5 \\ 6, 6, 12 \end{vmatrix} = 3(84 - 30) - (-5)(-108 - 30) + 17(-54 - 42) = 3(54) + 5(-138) + 17(-96) =$$

$$= 162 - 690 - 1632 = -2160$$

$$z = \frac{\det(Z)}{\det(A)} = \frac{-2160}{-720} = 3$$

Tehát  $x=1$ ,  $y=2$ ,  $z=3$ .

## 18. Cramer-szabály (2.példa)

$$2x + y - 4z = 5$$

$$4x + z = -9$$

$$-2y - 7z = -3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2, 1, -4 \\ 4, 0, 1 \\ 0, -2, -7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2, 1, -4 \\ 4, 0, 1 \\ 0, -2, -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{marad} \\ -2\text{ szer } I \\ \text{marad} \end{array} \sim \begin{vmatrix} 2, 1, -4 \\ 0, -2, 9 \\ 0, -2, -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{marad} \\ \text{marad} \\ -1 \cdot II \end{array} \sim \begin{vmatrix} 2, 1, -4 \\ 0, -2, 9 \\ 0, 0, -16 \end{vmatrix} = 64$$

x:

$$\det(X) = \begin{vmatrix} 5, 1, -4 \\ -9, 0, 1 \\ -3, -2, -7 \end{vmatrix} = -128$$

$$x = \frac{-128}{64} = -2$$

y :

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} 2,5, -4 \\ 4, -9, 1 \\ 0, -3, -7 \end{vmatrix} = 320$$

$$y = \frac{320}{64} = 5$$

z :

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} 2, 1, 5 \\ 4, 0, -9 \\ 0, -2, -3 \end{vmatrix} = -64$$

$$z = \frac{-64}{64} = -1$$

Tehát:  $(x, y, z) = (-2, 5, -1)$

19.

$$\begin{vmatrix} 2351, 1000, 3242, 2654 \\ 3240, 8767, 4568, 4532 \\ 5676, 1242, 6535, 7876 \\ 5674, 5712, 34632, 5443 \end{vmatrix} \neq 0$$
 Mivel csak egy tag páratlan, a többiben van páros

szorzó. Így a párosokhoz egy páratlant adva előjeltől függetlenül sosem lesz 0.

plussz példák:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$