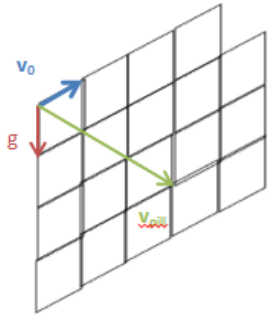
Hatvani Janka

LA – Konzultáció
Vektoralgebra

1.) Mekkora volt a kezdősebesség, ha 4 s elteltével a pillanatnyi sebesség (-4;11;8) m/s, a gravitációs gyorsulás pedig (0;0;-10) m/s^2?

$$v_{pill} = g \cdot t + v_0$$
$$(-4;11;8) = (0;0;10) \cdot 4 + v_0$$
$$(-4;11;8) = (0;0;40) + v_0$$
$$v_0 = (-4-0;11-0;8-40)$$
$$v_0 = (-4;11;-32)$$



2.) Számítsd ki az alábbi vektorok skalárszorzatát!
g=(14; 2,3; 6,8) h=(3; 15; 2,8)

$$\langle \underline{g}; \underline{h} \rangle = g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2 + g_3 \cdot h_3 = 14 \cdot 3 + 2{,}3 \cdot 15 \cdot 6{,}8 \cdot 2{,}8 = 42 + 34{,}5 + 19{,}04 = 90{,}54$$

3.) Csúcsaival adott az alábbi háromszög. Számítsd ki a kerületét és a legnagyobb szögét! A=(12;33;23); B=(14;36;33); C=(22;12;38)

$\overrightarrow{AB} = (2;3;10)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB_1}^2 + \overrightarrow{AB_2}^2 + \overrightarrow{AB_3}^2} = \sqrt{4+9+100} = \sqrt{113} = 10{,}63$

$\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-10)$

$\overrightarrow{BC} = (8;-24;5)$ $\quad \sqrt{64+576+25}$=25,78

$\overrightarrow{CB} = (-8;24;-5)$

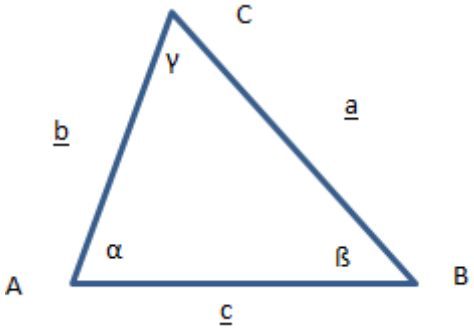
$\overrightarrow{AC} = (10;-21;15)$ $\quad \sqrt{100+441+225} = 27{,}67$

$\overrightarrow{CA} = (-10;21;-15)$

K=10,63+25,78+27,67=64,08

A leghosszabb oldal az AC, az ezzel szemközti szögre lesz szükségünk, azaz a B csúcsból kifelé mutató vektorokkal határozhatjuk meg azt.

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC_2}\cdot\overrightarrow{BA_2}+\overrightarrow{BC_3}\cdot\overrightarrow{BA_3}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|}\right) = \cos^{-1}\frac{-16+72-50}{10{,}63\cdot 25{,}78} = 88{,}75°$$



4.) Add meg az alábbi, csúcsaival adott háromszög A csúcsába mutató magasságvektorát!
A=(23;11;34) B=(14; 9; 22) C=(18; 27; 33)

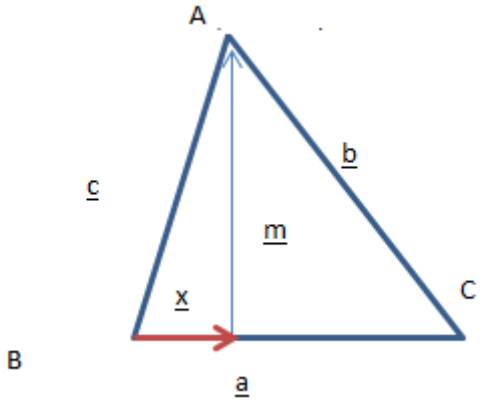
$\overrightarrow{BA} = \underline{c} = (9; 2; 12)$

$\overrightarrow{BC} = \underline{a} = (4; 18; 11)$

$$\underline{x} = \frac{\langle \underline{a};\underline{c}\rangle}{|\underline{a}|}\cdot \underline{e}_a = \frac{a_1\cdot c+a_2\cdot c_2+a_3\cdot c_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\cdot\frac{\underline{a}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{36+36+132}{\sqrt{16+324+121}}\cdot\frac{(4;18;11)}{\sqrt{16+324+121}} =$$

$$= \frac{204}{461}\cdot(4;8;11) = (1{,}77;\ 3{,}54;\ 4{,}86)$$

$$\underline{m} = \overrightarrow{BA} - \underline{x} = (7{,}23; -1{,}54; 7{,}14)$$



5.) Számítsd ki a háromszög területét: A(1; 6; 6); B(5; 0; 1); C(2; -1; -4)!

A területet vektoriális szorzattal kaphatjuk meg. Ez azonban a kifeszített paralelogramma területe lenne, ennek még a felét kell vennünk. A kapott vektornak a hosszát kell majd kiszámítanunk.

$\overrightarrow{AB} = (4; -6; -5)$

$\overrightarrow{AC} = (1; -7; -10)$

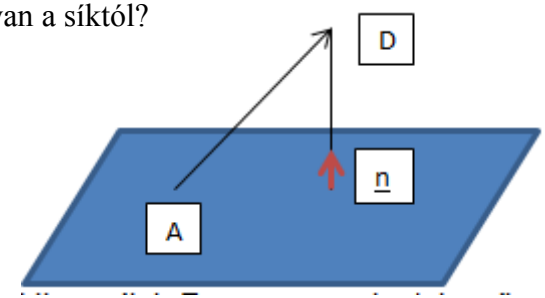
$$\underline{a} \times \underline{b} =$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \cdot (a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3) - \underline{j} \cdot (a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3) + \underline{k} \cdot (a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2) =$$

$$= \big((a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3); -(a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3); (a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2)\big) = ((60\text{-}35);\text{-}(\text{-}40\text{+}5);(\text{-}28\text{+}6)) = (25;35;\text{-}22)$$

$$T = \frac{\sqrt{25^2+35^2+(-22)^2}}{2} = 24{,}15$$

6.) Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon? Milyen messze van a síktól?
A (8; -1; 2); B (-5;1;0); C (7;-2;2); D (0; 2;8)



$\overrightarrow{AB} = (-\mathbf{13}; \mathbf{2}; -\mathbf{2})$
$\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 0)$
$\underline{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0-2; 0+2; 13+2) = (-2; 2; 15)$
-2x+2y+15z=-16-2+30=12

Ha D rajta van, kielégíti az egyenletet: $-2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 15 \cdot 8 = 124 \neq 12$ Azaz nincs rajta a síkon.

A D pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza adja meg. A normálvektor merőleges a síkra, ezt fogjuk kihasználni. D pontot összekötjük a sík egy tetszőleges pontjával (jelenleg A-val) és a kapott vektort rávetítjük a normálvektorra. Ezt skalárszorzattal oldjuk meg, ezért vigyáznunk kell, hogy a normálvektor egység hosszú legyen. (Hiszen a skalárszorzat a normálvektor hosszának és AD vektor vetületének szorzata, tehát le kell osztanunk a normálvektor hosszával.)

$\overrightarrow{AD} = (-8; 3; 6)$

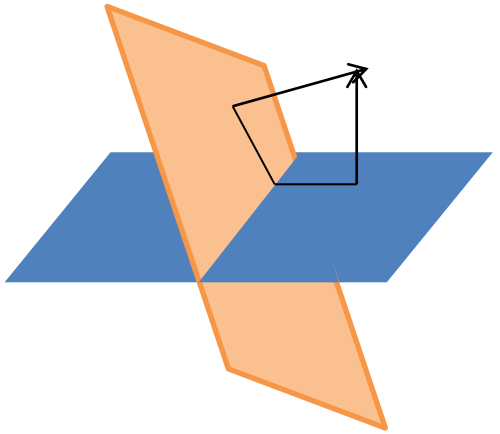
$$távolság = \left|\overrightarrow{AD} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|}\right| = \left|(-8; 3; 6) \cdot \frac{(-2;2;15)}{\sqrt{(-2)^2+(2)^2+(15)^2}}\right| = \left|\frac{16+6+90}{15{,}26}\right| = 7{,}34$$

7.) Egy parallelepipedon egy csúcsba futó élvektorai a(12;20;16); b(11;22;33); c(14;7;21). Mekkora az b,c és a,c élű oldallapok hajlásszöge?

Először írjuk fel a két oldal síkjának egyenletét!

$n_1 = \underline{a} \times \underline{b} = (660 - 352; -396 + 176; 264 - 220) = (308; -220; 44)$

$n_2 = \underline{a} \times \underline{c} = (308; -28; -196)$



A normálvektorok által bezárt szög és a síkok által bezárt szög merőleges szárú szögek, tehát összegük 180°. Így ha kiszámoljuk a normálvektorok által bezárt szöget, megkapjuk a síkok által bezártat is.

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{\langle \underline{n}_1;\underline{n}_2\rangle}{|\underline{n}_1|\cdot|\underline{n}_2|} = \cos^{-1}\frac{94864+6160-8624}{\sqrt{94864+48400+1936}\cdot\sqrt{94864+784+38416}} = 48{,}55°$$

//Mindig a kisebb szög lesz a hajlásszög!

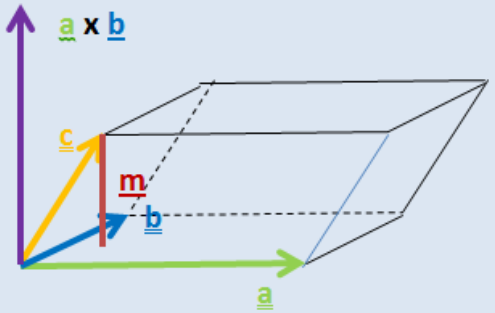
8.) Számítsd ki az alábbi, egy csúcsba futó élvektoraival adott parallelepipedon térfogatát! a(3; 5; 12); b(9; 15; 7); c(1; 8; 2)

$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} =$

$= |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\gamma \cdot |\underline{e}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos\gamma =$

$= T_p \cdot m = V_p$

Tehát a vegyes szorzat a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogatát adja meg.



$\underline{a} \times \underline{b} = (35 - 180; -21 + 108; 45 - 45) =$

$= (-145; 87; 0)$

$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = -145 \cdot 1 + 87 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 551$

Hatvani Janka