

VEKTORALGEBRA

készítette: Esztergár-Kiss Domokos

Elméleti összefoglalás:

- **vektor:** irányított szakasz
- **összeadás:** kommutatív, asszociatív, zárt, egységelem, inverz → Ábel-csoport
- **kivonás:** inverz elem hozzáadása
- **számmal szorzás:** $\lambda * a$, ahol λ valós szám
 - nem művelet, hanem függvény
 - kommutatív, vegyes asszociatív, vegyes disztributivitás
 - kiszámítás: koordinátánként szorzás
- **skalárral szorzás:** $a \cdot b = |a| * |b| * \cos \alpha$
 - kommutatív, NEM asszociatív, disztributivitás
 - $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a$ merőleges b -re
 - kiszámítás: $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- **vektoriális szorzat:** $a \times b = |a| * |b| * \sin \alpha$
 - anti kommutatív, NEM asszociatív, kétoldali disztributivitás
 - $a \times b \Leftrightarrow a$ párhuzamos b -vel
 - kiszámítás: $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
- **vegyes szorzat:** $(a \times b) \cdot c$
 - előjeles térfogat, paralelepipedon
 - kiszámítás: $(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

1.feladat Számítsd ki a két vektor által meghatározott szöget!

$$A(2; 10; 7) \quad B(8; -3; 3)$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 7^2} = \sqrt{153}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$$

$$\arccos \alpha = \frac{\underline{a} * \underline{b}}{|\underline{a}| * |\underline{b}|} = \frac{16 - 30 + 21}{\sqrt{153} * \sqrt{82}} = \frac{7}{\sqrt{12546}}$$

$$\alpha = 86,42^\circ$$

2.feladat Add meg a két vektor vektoriális szorzatát!

$$A(1; 4; 2) \quad B(0; -3; 1)$$

$$\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} * (4 + 6) - \underline{j} * (1 - 0) + \underline{k} * (-3 - 0) = 10\underline{i} - \underline{j} - 3\underline{k}$$

3.feladat Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon?

$$A(-3; -5; 2) \quad B(-5; -10; 0) \quad C(-2; -6; 1) \quad D(4; 3; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -5; -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1; -1; -1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (7; 8; -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{i} * (5 - 2) - \underline{j} * (2 + 2) + \underline{k} * (2 + 5) = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 7\underline{k}$$

$$\underline{n}(3; -4; 7)$$

$$3x - 4y + 7z = 3 * (-3) - 4 * (-5) + 7 * 2 = 25$$

Ez a sík egyenlete. Ekkor megvizsgáljuk, hogy D pont is rajta van-e.

$$3 * 4 - 4 * 3 + 7 * (-2) = -4$$

Tehát a D pont nincs rajta a síkon!

4.feladat Add meg a háromszög kerületét, és területét!

$$A(2; -1; 6) \quad B(1; 4; 5) \quad C(-1; 3; -3)$$

$$K = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{27} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{106} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{69} \quad K = \sqrt{27} + \sqrt{106} + \sqrt{69} = 23,79$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

5.feladat Adott két vektor merőleges-e?

$\underline{a} * \underline{b} = 0$ akkor és csak is akkor ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek

$$\underline{a}(2; -3; 1) \quad \underline{b}(7; 5; 1)$$

$$\underline{a} * \underline{b} = 2 * 7 - 3 * 5 + 1 * 1 = 0$$

A két vektor merőleges egymásra.

6.feladat Add meg a vektorok vegyes szorzatát!

$$\underline{a}(2; -2; -5) \quad \underline{b}(4; 3; 1) \quad \underline{c}(0; -1; 2)$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) * \underline{c} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) * (2 + 20) + 2 * (6 + 8) = 50$$

7.feladat Mennyi az ABCD pontok által kifeszített paralelepipedon térfogata?

$$A (-4; -1; 3) \quad B (0; -4; 1) \quad C (-8; -2; 0) \quad D(-8; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \underline{i} * (9 - 2) - \underline{j} * (-12 - 8) + \underline{k} * (-4 - 12) \\ &= 7\underline{i} + 20\underline{j} - 16\underline{k} \end{aligned}$$

Ez az ABC pontok által meghatározott sík normálvektora. A paralelepipedon térfogatát a vektoriális szorzattal kaphatjuk meg.

$$\overrightarrow{AD} (-8; 2; -1)$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -8 * (9 - 2) - 2 * (-12 - 8) - 1 * (-4 - 12) = 0$$

Ez mit jelent? Talán rossz az eredmény? Nem. A D pont rajta van a síkon, ezért az ABCD nem határoz meg egy paralelepipedont, így nincs megoldás.

8.feladat Add meg a b vektorra vetített a vektort!

$$\underline{a} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underline{b} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_b = (\underline{a} * \underline{e}_b) * \underline{e}_b$$

$$\underline{e}_b = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \left(\frac{4 * \sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

$$\underline{a}_b = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4 * \sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \right] * \underline{e}_b = \left(2 * \sqrt{2} - \frac{5 * \sqrt{2}}{6} - \frac{4 * \sqrt{2}}{3} \right) * \underline{e}_b = \left(-\frac{2}{9}; -\frac{1}{18}; \frac{1}{18} \right)$$

9.feladat Mekkora a tetraéder ABC lapjának magassága?

$$A(3; 0; 0) \quad B(0; 4; 0) \quad C(0; 0; 1) \quad D(2; 5; 0)$$

Meghatározunk egy P pontot, ami a magasságvektor talppontja lesz, és kiszámítjuk az AP hosszúságát.

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} * e_{AB}$$

$$\overrightarrow{AB}(-3; 4; 0) \quad |\overrightarrow{AB}| = 5 \quad e_{AB}\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{AC}(-3; 0; 1) \quad |\overrightarrow{AP}| = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{9}{5}$$

Majd a jól ismert Pitagorasz tételt felhasználva megkapjuk a magasságot.

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10} \quad (\sqrt{10})^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + m^2$$

$$m = \frac{13}{5}$$

10.feladat Mekkora a P pont síktól való távolsága?

$$\underline{P} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \underline{n} \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \quad \underline{n} * \overrightarrow{P_O P} = 0 \quad \overrightarrow{P_O} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Egy nem a síkon lévő pont távolságának meghatározásához a következő összefüggést alkalmazhatjuk:

$$\underline{e}_n * \overrightarrow{P_O P} = m$$

$$\underline{e}_n = \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \left(\frac{7}{\sqrt{705}}; \frac{20}{\sqrt{705}}; -\frac{16}{\sqrt{705}} \right)$$

$$\overrightarrow{P_O P} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_n * \overrightarrow{P_O P} = 8,135$$

11.feladat Határozd meg az ABCD tetraéder q lapja (ACD) és egy adott sík szögét!

$$A(1; 2; -3) \quad B(5; 0; 1) \quad C(3; -1; -2) \quad D(4; 5; 1) \quad \underline{n}_p(-3; 1; 5)$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i} * (-12 - 3) - \underline{j} * (8 - 3) + \underline{k} * (6 + 9) = -15\underline{i} - 5\underline{j} + 15\underline{k}$$

Alapvetően a két sík normálvektorával számolva megkapható a keresett szög.

$$\underline{n}_g(-15; -5; 15) \quad |\underline{n}_g| = \sqrt{475}$$

$$\underline{n}_p(-3; 1; 5) \quad |\underline{n}_p| = \sqrt{35}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\underline{n}_g * \underline{n}_p}{|\underline{n}_g| * |\underline{n}_p|} = \frac{115}{\sqrt{475} * \sqrt{35}}$$

$$\alpha = 26,87^\circ$$