Vektoralgebra

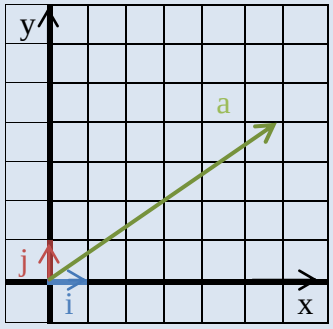
Az {i, j} illetve az {i, j, k} bázisok. Nem ortogonális bázisok.

Bázis: a síkban bármely kettő, nem párhuzamos, a térben bármely három, nem egy síkú, páronként nem párhuzamos vektor segítségével felírható a sík/tér összes vektora, azaz bázist alkotnak.

Koordináta: az a szám, amivel az adott bázisvektort szorozzuk.

Az összeadás/ kivonás/ számszoros műveletek minden koordináta-rendszerben hasonlóan működnek. A megfelelő koordinátákat összeadjuk, kivonjuk, illetve szorozzuk az adott skalárral.

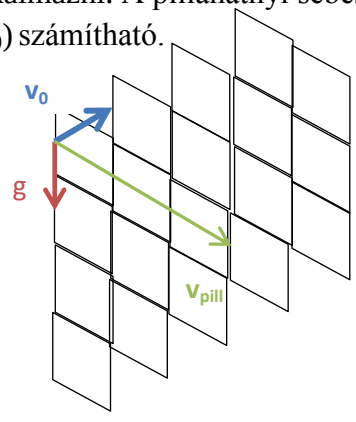
Eddigi tanulmányaink során az {**i,j**} illetve {**i,j,k**} bázisokat használtuk, melyek vektorainak tulajdonságai, hogy merőlegesek egymásra (ortogonálisak) és hosszuk egy(normáltak), tehát a rendszer ortonormált.. Ezek függetlenek egymástól, tehát a sík- illetve térbeli felbontási tétel értelmében felírhatóak velük a sík/tér vektorai – bázist alkotnak.
Jobbsodrású a rendszer, az i, j, k vektorok irányát jobb kezünk hüvelyk-, mutató-, és középső ujjával jegyezhetjük meg.



$\mathbf{a}=(6;4)_{ij}$

koordináták — bázis jelölése (**i,j** ill. **i,j,k** bázis esetén nem muszáj kiírni)

Mikor érdemes más, nem ortonormált bázist alkalmazni?
Fizikában a ferde hajításoknál megéri úgynevezett ferdeszögű koordináta-rendszert alkalmazni. A pillanatnyi sebesség (v_{pill}) a grvitációs gyorsulásból (g) és a kezdősebességből (v_0) számítható.



1.) Mekkora a pillanatnyi sebesség 3 s elteltével, ha a kezdősebesség (15;9;7) m/s, a gravitációs gyorsulás pedig (0;0;-10) m/s^2 ?

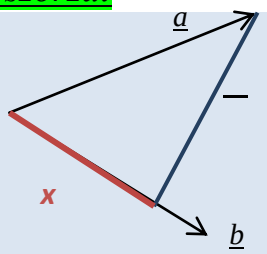
$g=(0;0;-10)\ m/s^2$
$v_0=(15;9;7)\ m/s$
$t=3\ s$

2.) Mekkora a pillanatnyi sebesség 8 s elteltével, ha a kezdősebesség (8;-6;27) m/s, a gravitációs gyorsulás pedig (0;0;-10) m/s^2 ?
[(8;-6;-53)m/s]

3.) Mekkora volt a kezdősebesség, ha 4 s elteltével a pillanatnyi sebesség (-4;11;8) m/s, a gravitációs gyorsulás pedig (0;0;-10) m/s^2?
[(-4,11;48) m/s]

Az ortonormált {i,j,k} bázis igazi előnyeit a skalár-, illetve vektoriális szorzatnál láthatjuk majd.

Skalárszorzat



Ez egy szám, a vektor vetületének (x) hossza szorozva b vektor hosszával.

- kommutatív
- nem asszociatív
- disztributivitás
- akkor 0, ha merőlegesek

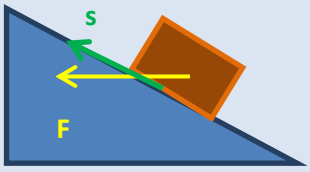
$\underline{a}=(a_1;a_2;a_3)$
$\underline{b}=(b_1;b_2;b_3)$

A skalárszorzat kiszámítása *ortonormált koordináta-rendszerben* {i,j,k}:

BIZONYÍTÁS!

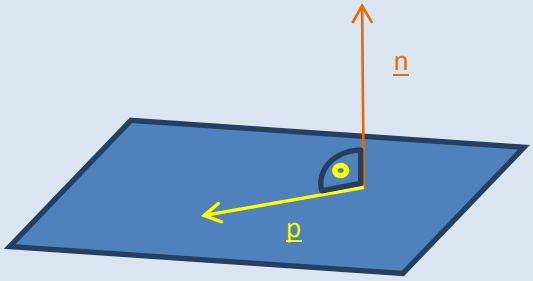
A vektorok által bezárt *szög* kiszámítása a skalárszorzat segítségével:

Fizikai alkalmazás: a *munka* kiszámítása. Definíció szerint a munka az erő- és elmozdulás-vektor skalárszorzata:



A sík egyenlete

A skalárszorzat definíciójából láthatjuk, hogy *két merőleges vektor skalárszorzata 0, hiszen cos90°=0*. A síkhoz létezik egy normálvektor, ami a sík összes vektorára merőleges, tehát a sík bármely vektorával skalárszorozva 0-t ad eredményül. Legyen p (x,y,z) a sík egy vektora, $\underline{n}(n_1;n_2;n_3)$ pedig a normálvektora.



1.) Számítsuk ki az alábbi vektorok skalárszorzatát!

a.) $\underline{a}=(13;34)$ $\underline{b}=(24;19)$

b.) $\underline{a}=(3;4;7)$ $\underline{b}=(6;8;9)$

c.) $\underline{x}=(45;12,5)$ $\underline{y}=(19,5;28)$ // (1227,5)

d.) $\underline{g}=(14;\ 2,3;\ 6,8)$ $\underline{h}=(3,4;\ 15;\ 2,8)$ // (101,14)

e.) $\underline{a}=(2;3;6)$ $\underline{b}=(4;7;10)$ $\underline{c}=(8;5;9)$

// (712; 445; 801)

// (314; 471; 942)

Ezen a példán látszik, hogy a skalárszorzat nem asszociatív művelet.

f.) $\underline{a}=(11;13;15)$ $\underline{b}=(3;7;18)$ $\underline{c}=(2;4;9)$

// (603)

// (603)

Ezen a példán látszik a disztributív szabály teljesülése.

2.) Munka kiszámítása

a.) Vízszintes talajon húzunk 120 N erővel 5 m-es távon egy testet. Az elmozdulás és az erőhatás vektora párhuzamos. Mekkora munkát végeztünk?

Használjuk a definíció szerinti skalárszorzat-számítást!

$|\underline{F}|=120$
$|\underline{s}|=5$
$\varphi=0°$

b.) Mekkora munkát végeztünk, ha az erő $\underline{F}=(12;\ 23,5;\ 3,4)$ N, az út pedig $\underline{s}=(2;\ 11;\ 14,3)$ m?

Mivel két vektor adott, használjuk az ortogonálist koordinátarendszerben alkalmazható módszert!

W= _ _

_ _ J

c.) 230 N erőt fejtettünk ki, és 1620 J munkát végeztünk. Mekkora volt az elmozdulás, ha az erővektor és az elmozdulás-vektor 60°-ot zártak be?

//(14,087 m)

d.) Mekkora munkát végeztünk, ha az erő F=(34; 24,3; 18,9) N, az út pedig s=(21; 13,2; 8,9) m? //(1202,97 J)

e.) Mekkora az x irányú elmozdulás, ha a kifejtett erő F=(10;8;6) N, az y irányú elmozdulás 2m, a z irányú 4m, a munka pedig 420 J?

_ _

x=38m

3.) Szög kiszámítása

a.) Számítsd ki a két vektor által meghatározott szöget!

a (2; 10; 7)
b(8; -3; 3)

Használjuk a következő összefüggést!

_ _

$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 7^2} = \sqrt{153}$

$|\underline{b}| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$

Esztergár-Kiss Domokos

b.) Számítsd ki a két vektor által meghatározott szöget!
a=(-3;6;23) és b=(14;-5;11) //(65,88°)

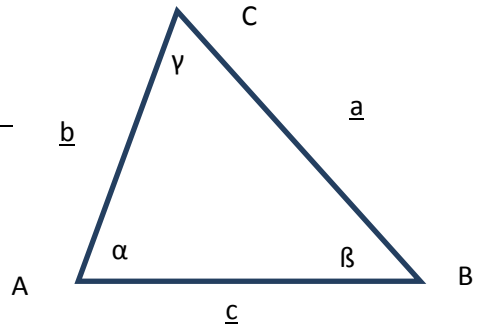
c.) Számítsd ki a két vektor által meghatározott szöget!

a=(-6;26;31) és b=(-13;-5;41) //(46,5075°)

d.) Csúcsaival adott egy háromszög. Számítsuk ki kerületét és a bezárt szögeket!

A(12;6;18)
B(23;7;19)
C(4;18;33)

A pontok segítségével írjuk fel az oldalvektorokat, ezekből az előző feladatban alkalmazott módszerrel kiszámíthatóak a szögek.



A szögek számításakor ügyeljünk a vektorok irányára! Mindig az adott csúcsból kifelé mutató vektorokkal számoljunk! Például a ß szög kiszámításához és vektorokra lesz szükségünk, tehát c vektornak az ellentettjét vesszük (-11;-1;-1).

e.) Csúcsaival adott egy háromszög. Számítsuk ki kerületét és a bezárt szögeket!

A(21;16;8)
B(21;27;9)
C(3;8;13)

//(K=57,83; α=116,97°; ß=47,64°; γ=23,88°)

f.) Csúcsaival adott az alábbi háromszög. Számítsuk ki a kerületét és a legnagyobb szögét!

A=(2,5; 3,8; 6,2); B=(6,4; 3,2; 4,4); C=(5,2; 2,4; 6,8)

A kerületet a d.) feladatrészben alkalmazott módszerrel számíthatjuk ki. Utána vegyük figyelembe, hogy egy háromszögben a legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemközt található!

2,23

K=2,23+2,23+4,33=8,79

A leghosszabb az , tehát a vektorok által bezárt szöget kell kiszámítanunk. Figyeljünk, hogy a C csúcsból kifelé mutató vektorokkal kell számolnunk, azaz a vektornak az ellentettjét kell vennünk!

g.) Csúcsaival adott az alábbi háromszög. Számítsuk ki a kerületét és a legnagyobb szögét!

A=(12;33;23); B=(14;36;33); C=(22;12;38)

// (K=65,02; a leghosszabb; 92,92°)

4.) Ortogonálisak, azaz merőlegesek-e az alábbi vektorok?

a.) a=(3,6; 2,8); b=(3,5; -6)

Két vektor akkor, és csak akkor merőleges, ha skalárszorzatuk 0, hiszen cos90°=0.

Tehát nem merőlegesek!

b.) x=(3; 4,5); y=(-9; 6) //merőlegesek
a=(2; 6; 7) b=(3; -1; 0) //merőlegesek

c=(4,5; -2,3; 0,7) d=(2,2; 1,5; -6,7) //nem merőleges (1,76)

a=(1;3;3,5) b=(6; -2; 0) c=(-2;-6;—) //páronként kell ellenőrizni (3 számolás) - merőleges

c.) Adjuk meg úgy b vektor z koordinátáját, hogy b merőleges legyen a-ra!

a=(2,4; -3,2; 5,6); b=(-1,2; 5,6; z)

A skalárszorzat legyen 0!

d.) Adjuk meg úgy b vektor hiányzó koordinátáját, hogy b merőleges legyen a-ra!

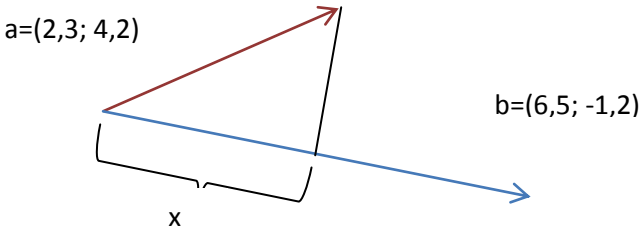
a=(2,3; 4,3; -8,6) b=(3,4; y; 12,5) //y= -23,18

a=(3,3; -4,5; 2,1) b=(x; 2,3; 1,1) //x= -2,43

a(13,7; 0,5; 2,3) b=(2,2; 0,6; z) //z= 13,23

5.) Vetületek hossza, magasság

a.) Adjuk meg az a vektor b vektorra vetített szakasz hosszát!



Az x szakasz hosszát kell kiszámolnunk. Skalárszorzat kiszámításakor ezt a hosszt szorozzuk b vektor hosszával. Tehát a skalárszorzatot le kell osztanunk b vektor hosszával.

b.) Adjuk meg az a vektor b vektorra vetített szakasz hosszát!

a= (2,5; 6,3; 7,8); b= (3,3; 4,4, 2,1)

// x=8,89

c.) Adjuk meg az a vektor b vektorra vetített szakasz hosszát!

a= (8,6; -3,4; 2,6); b= (4,6; 7,4; -3,2)

// x=0,65

d.) Add meg a b vektorra vetített a vektort!

$\underline{a}\begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix}$ $\underline{b}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$

Az előző feladatokban kapott x hosszt most egy, b-vel megegyező irányú, egység hosszú vektorral (_) kell megszorozni. Ezt a vektort úgy kaphatjuk meg, hogy b vektort elosztjuk saját hosszával.

$$\underline{e}_b = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \left(\frac{4*\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

Esztergár-Kiss Domokos

e.) Add meg a b vektorra vetített a vektort!

a(-2;3;4) b(5;-6;8)

//x=(0,16;-0,192;0,256)

f.) Add meg a b vektorra vetített a vektort!

a(23,5; 34,2; 28,6) b(23,2; 11,4; 35,4)

//x=(23,51; 11,55; 35,88)

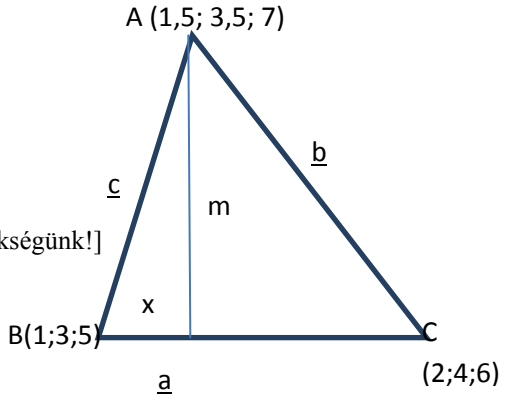
g.) Mekkora az alábbi háromszög a oldalához tartozó magassága?

Ha kiszámítjuk c oldal a-ra vetített hosszát, azaz x-et, akkor Pitagorasz-tétellel megkaphatjuk a magasságot.

=a=(2-1; 4-3; 6-5)=(1;1;1;)

=c=(0,5;0,5;2)

[Vigyázzunk, hogy B-ből kifele mutató vektorokra van szükségünk!]



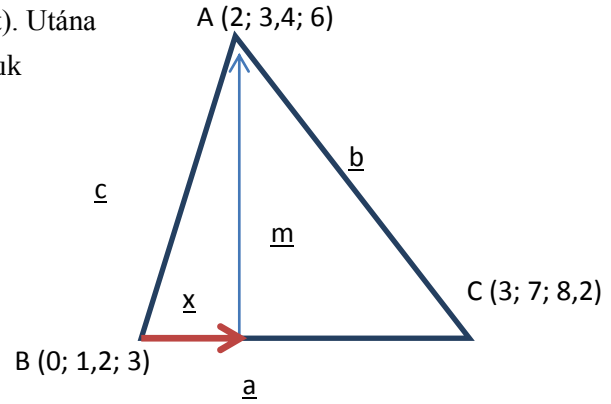
h.) Számold ki az előző feladatban levő háromszög másik két magasságát is, ugyanilyen módszerrel!

// 2,34

//

i.) Add meg az alábbi háromszög A csúcsába mutató magasságvektorát!

Kiszámoljuk x vektort (c a-ra vetített vektorát). Utána c ( ) vektorból x vektort kivonva megkapjuk a magasságvektort.



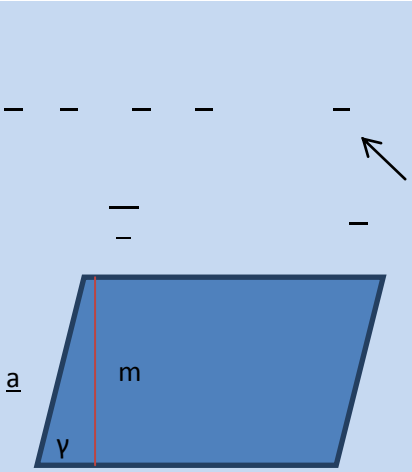
(1,48; 2,86; 2,56)

j.) Add meg az alábbi, csúcsaival adott háromszög A csúcsába mutató magasságvektorát!

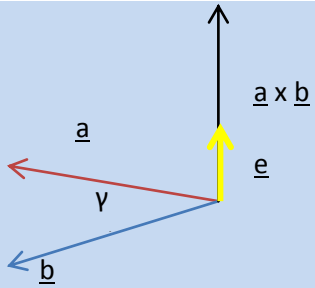
A=(23;11;34) B=(14; 9; 22) C=(18; 27; 33)

// m=(7,23; -5,96; 7,14)

Vektoriális szorzat



az egységvektor 1 hosszú, merőleges a-ra és b-re is, párhuzamos axb-vel, és a, b, e vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak



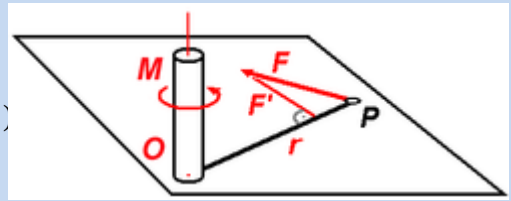
- nem asszociatív
- antikommutatív
- kétoldali disztributivitás
- akkor 0, ha párhuzamosak

Látszik, hogy a vektoriális szorzat kiszámításakor az oldalt szorozzuk a hozzá tartozó magassággal, tehát a két vektor által kifeszített paralelogramma területének számértékét kapjuk meg egy vektor formájában. Így a kapott vektor hossza a paralelogramma területe, iránya pedig az egységvektoréval egyezik meg.

Kiszámítása ortogonális koordináta-rendszer esetén:

Fizikai alkalmazás:

- a forgatónyomaték kiszámítása.
- (- a Lorentz-erő kiszámítása:



1.) Számítsuk ki az alábbi vektoriális szorzatokat!

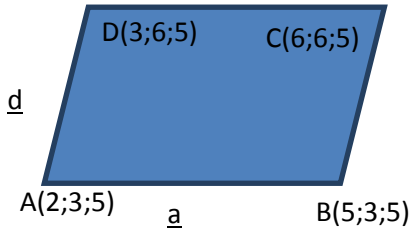
a.)

b.)

// (114;111;-78)
// (169;304;531)
//(315;-209;-495)
// (-2,76; -9,6; -52,62)

2.) Területek

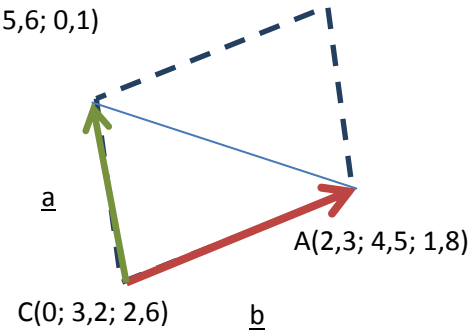
a.) Számítsd ki az alábbi paralelogramma területét!



A paralelogrammának bármely két, szomszédos oldalát választhatjuk, s ezek vektoriális szorzata éppen a paralelogramma területével lesz egyenlő. Itt is vigyázzunk, hogy a két vektor egy csúcsból mutasson kifelé!
A kapott vektor hossza lesz egyenlő a paralelogramma területének mértékével!

b.) Számítsd ki a háromszög területét!

B(3,2; 5,6; 0,1)



A két vektor által (a és b) kifeszített paralelogrammának pont a fele a keresett háromszög.

c.) Számítsd ki a háromszög területét: A(2; 5; 7); B(3; 6; 8); C(0; 1; 9)!

//T=3,741

d.) Számítsd ki a háromszög területét: A(1; 6; 6); B(5; 0; 1); C(2; -1; -4)!

//T=24,15

e.) Számítsd ki a háromszög területét, melynek 2 oldalvektora (1;2;3) és (4;0;8)!

//T=9,16

3.) Normálvektor, síkegyenlet

a.) Egy sík három pontja A(2; 4; 8); B(0; 3; 6) C(3;7;10). Adjuk meg a sík egyenletét!

A sík egyenletéhez szükségünk van a sík normálvektorára és a sík egy pontjára. A normálvektor merőleges a sík minden vektorára, tehát a három pont által meghatározott vektorokra is. Ez pont a sík vektorainak vektoriális szorzata lesz.

b.) Egy sík három pontja A(1; -5; 0); B(-4; 2; 1) C(2;-7;11). Adjuk meg a sík egyenletét!

// 79x+56y+3z=-201

c.) Egy sík három pontja A(4; 6; -3); B(2; 4; -7); C(-1; 3; 4). Adjuk meg a sík egyenletét!

//-26x+34y-4z=112

d.) Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon?

A (-3; -5; 2) B (-5;-10; 0) C (-2;-6;1) D (4; 3; -2)

$$\overrightarrow{AB} = (-2;\ -5;\ -2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1;\ -1;\ -1)$$
$$\overrightarrow{AD} = (7;\ 8;\ -4)$$

$$\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{i} * (5-2) - \underline{j} * (2+2) + \underline{k} * (2+5) = 3\underline{i} - 4\underline{j} + 7\underline{k}$$

$$\underline{n}\ (3;\ -4;7)$$

$$3x - 4y + 7z = 3 * (-3) - 4 * (-5) + 7 * 2) = 25$$

Ez a sík egyenlete. Ekkor megvizsgáljuk, hogy D pont is rajta van-e.

$$3 * 4 - 4 * 3 + 2 * (-2) = -4$$

Tehát a D pont nincs rajta a síkon! *Esztergár-Kiss Domokos*

e.) Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon?

A (5; -4; 2); B (0; 7; -3); C (3; -1; 8); D (3; 0,4; 0)

//-81x-40y-7z= -259; D rajta van a síkon

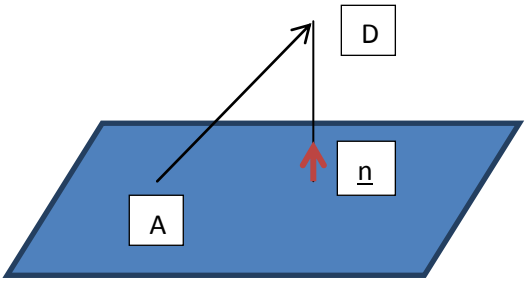
f.) Add meg az ABC pontok által határolt sík egyenletét? D pont rajta van a síkon?

A (8; -1; 2); B (-5;1;0); C (7;-2;2); D (0; 2;8)

//-2x+2y+15z= 12; D nincs rajta a síkon

4.) Sík és pont távolsága, magasság(vektor)

a.) Számítsuk ki az A(2;2;2;) B(3;4;5) C(8;6;4) pontok által meghatározott sík és D(10;6;8) pont távolságát.



A pont és sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza adja meg.
A normálvektor merőleges a síkra, ezt fogjuk kihasználni. D pontot összekötjük a sík egy tetszőleges pontjával (jelenleg A-val) és a kapott vektort rávetítjük a normálvektorra. Ezt skalárszorzattal oldjuk meg, ezért vigyáznunk kell, hogy a normálvektor egység hosszú legyen. (Hiszen a skalárszorzat a normálvektor hosszának és AD vektor vetületének szorzata, tehát le kell osztanunk a normálvektor hosszával.)

b.) Egy tetraéder négy csúcsa: A(2;3;4;) B(-5; 10; 8) C(0; -4; 9) D(12; 6; 3). Mekkora a D csúcsba húzott magasság?

Ugyanaúgy számolunk, mint az előző feladatban! A sík pontjai az alaplap csúcspontjai.

//m=6,96

c.) Egy tetraéder négy csúcsa: A(2;5;-6;) B(-7; 20; -18) C(10; 14; 12) D(-8; 7; 13). Mekkora a D csúcsba húzott magasság?

//m=17,23

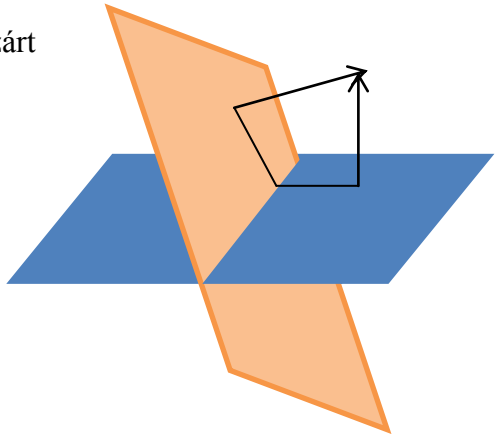
d.) Egy tetraéder négy csúcsa: A(12;3;6;) B(17; 2; 8) C(0; 4; 22) D(28; 12; 3). Adjuk meg a D csúcsba mutató *magasságvektort!*

Az előző módszerrel kiszámoljuk a magasság hosszát, majd ezzel a számmal megszorozzuk az egységnyi hosszúságú normálvektort.

5.) Síkok hajlásszöge

a.) Számítsd ki az alábbi síkok hajlásszögét!
2x+3y-z=2
x-5y+2z=8

A normálvektorok által bezárt szög és a síkok által bezárt szö merőleges szárú szögek, tehát összegük 180°.
Így ha kiszámoljuk a normálvektorok által bezárt szöget, megkapjuk a síkok által bezártat is.



A normálvektorokat leolvashatjuk a sík egyenletéből.

//Mindig a kisebb szög lesz a hajlásszög!

b.) Határozd meg az ABCD tetraéder q lapja (ACD) és egy normálvektorával adott sík szögét!
A (1; 2; -3) B (5; 0; 1) C (3; -1; -2) D (4; 5; 1) $\underline{n_p}(-3;1;5)$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} x \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{i} * (-12-3) - \underline{j} * (8-3) + \underline{k} * (6+9) = -15\underline{i} - 5\underline{j} + 15\underline{k}$$

Alapvetően a két sík normálvektorával számolva megkapható a keresett szög.

$\underline{n_g}(-15;-5;15) \quad |\underline{n_g}| = \sqrt{475}$

$\underline{n_p}(-3;1;5) \quad |\underline{n_p}| = \sqrt{35}$

$$\alpha = arc\cos\frac{\underline{n_g} * \underline{n_p}}{|\underline{n_g}| * |\underline{n_p}|} = \frac{115}{\sqrt{475} * \sqrt{35}}$$

$$\alpha = 26{,}87°$$

Esztergár-Kiss Domokos

c.) Egy tetraéder négy csúcsa: A(2;4;6); B(8;9;10); C(-6;-4;-2); D(-7;5;-3). Add meg az ABC és BCD lapok hajlásszögét!

$\underline{n}_1$=(-15;-4;-13)
$\underline{n}_2$=(121; -2; -139)
α=92,38°

d.) Egy parallelepipedon egy csúcsba futó élvektorai a(12;20;16); b(11;22;33); c(14;7;21). Mekkora az a,b és a,c élű oldallapok hajlásszöge?

$\underline{n}_1$ _ _
_ _ _

e.) Egy parallelepipedon egy csúcsba futó élvektorai a(12;20;16); b(11;22;33); c(14;7;21). Mekkora az a,b és b,c élű oldallapok hajlásszöge?

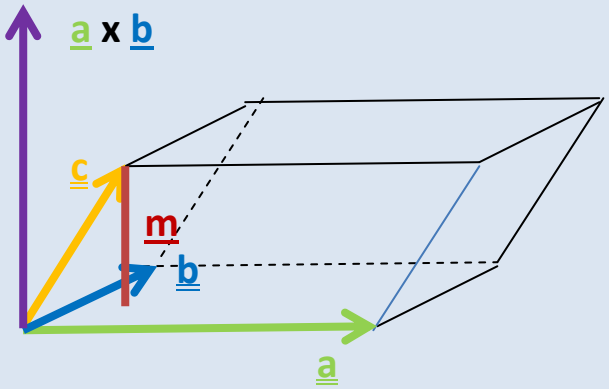
$\underline{n}_1$ _ _
_ _ _

f.) Egy parallelepipedon egy csúcsba futó élvektorai a(12;20;16); b(11;22;33); c(14;7;21). Mekkora az b,c és a,c élű oldallapok hajlásszöge?

$\underline{n}_1$ _ _
_ _ _

Vegyes szorzat

Tehát a vegyes szorzat a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogatát adja meg.



1.) Számítsd ki az alábbi, egy csúcsba futó élvektoraival adott parallelepipedon térfogatát!

a.) a(12; 16; 20); b(8; 10; 12); c(9; 18;27)

b.) a(3; 5; 12); b(9; 15; 7); c(1; 8; 2)

//V=551

c.) A(4; 8; 12); B(3;7;9); C(7;15;23); D(13;11;9)

Vegyes gyakorló feladatok

1.)

Add meg a háromszög kerületét, és területét!

A (2; -1; 6); B (1; 4; 5); C (-1; 3; -3)

$$K = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-9\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-8\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{27} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{106} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{69}$$

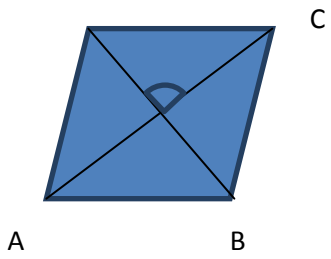
$$K = \sqrt{27} + \sqrt{106} + \sqrt{69} = 23{,}79$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}|}{2}$$

Esztergár-Kiss Domokos

2.) Egy rombusz három csúcsa A(2;3;5); B(-1;0;8); C(6;-9;2). Add meg a negyedik csúcsot!

A rombusz átlói merőlegesek és felezik egymást.
Kiszámoljuk AC átló felezőpontját, F-et, összekötjük B-vel,
így megkapjuk vektort. Ezzel kiszámolhatjuk D csaúcsot.



3.) Egy parallelepipedon A (0;2;13) csúcsba futó éleit az B (-5; 3; 2); C (8; 14; -11) és D (2; -4; 16) csúcsok határolják.

a.) Adjuk meg a parallelepipedon testátlójának hosszát!

A három oldalél összege kiadja a testátló vektorát, ennek utána kiszámoljuk a hosszát.

b.) Számítsuk ki a test felszínét!

2-2 élvektor keresztszorzata megadja egy-egy oldallap területét. Mind a hármat kétszer vesszük, így megkapjuk a felszínt.

//923,516

c.) Számítsuk ki a test térfogatát!
// 1260

A következő feladatok forrása:
http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/FS_vektor.pdf

Összetett gyakorló feladatok (régebbi zh feladatok is)

1.

a.) Milyen messze vannak egymástól az A(1,2,3) és a B(4,-2,6) pontok?

b.) Számítsa ki az A, B és a C(-3,4,-2) pontok által meghatározott háromszög kerületét, területét, szögeit, C csúcsán áthaladó magasságvektorának koordinátit!

c.) Írja fel az A, B és a C(-3,4,-2) pontok által meghatározott sík egyenletét ax+by+cz=d formában! A sík tartópontjaként használja az A pontot! Adja meg az imént meghatározott sík és a (2, 3, 2) helyvektor által bezárt szöget!

d.) Bontsa fel az a vektort a b vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre!)
a= (1, 1, 2), b=(1, 0, 1). Mekora e két vektor által kifeszített háromszög területe?

3. A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak-e be. A megadott koordináták az i, j, k bázisra vonatkoznak:

b) (4,-2, 6) és (-3,4,-2) ;
c) (1,2,3) és (4,-2,6);
d) (1,1,1) és (-10, 7, 3)

4. Legyen az ABC háromszög három csúcsa: A(2,4,3), B(-3,1,6), C(0,-4,4). Számítsa ki a háromszög X-Y síkra vett merőleges vetületének területét!

Megoldás: A csúcsok helyvektoraiból a háromszög oldalvektorai meghatározhatók, ezekből vektoriális szorzással kapjuk meg a háromszög területét (területvektorát). Ezután az X-Y sík normálvektorának az **n**=(0,0,1) [vagy akár az **n**=(0,0,-1)] vektort véve, az imént meghatározott területvektor és az **n** normálvektor skaláris szorzata (pontosabban ennek abszolút értéke) éppen a kérdéses vetület területét adja.

Tehát a háromszög oldalvektorai $\overline{AB}$=(-5,-3,3), $\overline{AC}$=(-2,-8,1), a háromszög területvektora pedig:

t= $\frac{1}{2}(\overline{AB}\times\overline{AC})=\frac{1}{2}$(21,-1,34). Az X-Y síkra vett merőleges vetület területe: | **t n** |=17.

5. Legyen az ABC háromszög három csúcsa: A(2,4,3), B(-3,1,6), C(0,-4,4). Számítsa ki a a háromszög legnagyobb szögét, és az X-Y síkra vett merőleges vetületének területét!

6. Adottak a következő pontok: A(1;−2;0),B(2,3,1),C(−1,2,2), D(3,1,4).

a.) Írja fel az A ponton átmenő, BCD síkkal párhuzamos sík egyenletét!

b.) Mekkora az a.) -ban kiszámított sík és az x − 2y + z + 3 = 0 egyenlettel megadott sík által bezárt szög?

7. Egy Nap körül keringő űrszonda háromszög alakú napelem panelével fedezi energiaszükségletét. A panelt három egymásra merőleges, a háromszög csúcsaiba futó kar tartja, és egy merevítő rúd, amelyik a háromszög közepe táján érintkezik a panellel, és merőleges a felületére. Mind a négy rúd a szonda oldalán, egy pontban van rögzítve. Az egymásra merőleges karok hosszúsága 2m, 2m illetve 3m, s ez utóbbi éppen a Nap irányába mutat. Azoknak a fotonoknak a fluxusa, amelyekre a napelem érzékeny, $1{,}125\cdot10^{18}$ 1/(m^{2}s) , azaz a Nap irányára merőlegesen 1 m^2 felületre másodpercenként $1{,}125\cdot10^{18}$ db „hasznos” foton érkezik. Ha minden foton két elektront lök ki a napelem félvezetőjének paneljéből, akkor mennyi elektron termelődik egy másodperc alatt? Mekkora szögben esik a napfény a napelem felületére (azaz mekkora a felület normálisa és a Nap iránya által bezárt szög)? Milyen hosszú az a merevítő rúd, amely a háromszög alakú panelre merőleges?

Megoldás:

A csúcspontokba mutató vektorok: $\underline{a}=(3,0,0)$; $\underline{b}=(0,2,0)$; $\underline{c}=(0,0,2)$.
Kiszámítjuk a háromszög területvektorát az oldalvektorok keresztszorzatával:

$$\underline{CA}=\underline{a}-\underline{c}=(3,0,-2);\ \underline{CB}=\underline{b}-\underline{c}=(0,2,-2);\ \underline{t}=\frac{1}{2}\underline{CA}\times\underline{CB}=(2,3,3).$$

A napelem napirányú keresztmetszetét megkapjuk, ha veszünk egy a Nap irányába mutató egységvektort, $\underline{n}=(1,0,0)$, és skalárisan megszorozzuk a területvektorral: $t\cdot\underline{n}=2$. Ez tehát $2\,m^2$, azaz egy másodperc alatt $2\cdot2\cdot1{,}125\cdot10^{18}=4{,}5\cdot10^{18}$ elektron lép ki a lemezből.

A fénysugarak beesési szöge: $\cos\varphi=\frac{\underline{t}\cdot\underline{n}}{|\underline{t}|\cdot|\underline{n}|}=\frac{2}{\sqrt{22}}\approx0{,}4264$, amiből $\varphi\approx64{,}76^\circ$.

A $2m$-es tartó rúd illetve a $3m$-es tartó rúd egy háromszöget határoznak meg, amelynek területe $3m^2$. Ez a háromszög képezi alapját annak a gúlának, amelynek élei a tartó rudak illetve a napelem panel élei. Ennek magasságát a másik $2m$-es tartó rúd adja, így a gúla

térfogata $2m^3$. A merevítő rúd hossza a merőleges karok és a panel alkotta háromszög alapú gúla magassága, azaz: $m = \frac{3V}{T_{alap}} = \frac{6m^3}{\sqrt{22}m^2} \approx 1{,}28\,m.$

9. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(-2; -1), B(4; -3), C(4; 5). A B csúcsból induló magasságvonal az AC oldalt a T pontban metszi. Mekkora az AT szakasz hossza?

Megoldás:

Jelölés: legyen $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AC}$, $\underline{t} = \overrightarrow{AT}$. Ekkor a $\underline{t}$ vektort megkaphatjuk, mint a $\underline{b}$ vektor $\underline{c}$ vektorra vett vetületét. Ezt az alábbi módon tudjuk kiszámolni:

$\underline{t} = \hat{\underline{c}} \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$,

ahol a $\hat{\underline{c}}$ vektor a $\underline{c}$ irányába mutató egységvektor, α pedig a $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok által bezárt szög. Az egységvektort behelyettesítve, a maradék tényezőket pedig a két vektor skalárszorzatából kifejezve:

$\underline{t} = \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} \cdot \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{1}{|\underline{c}|^2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{c}$

A vektornak most csak a hosszára van szükségünk:

$|\underline{t}| = \frac{1}{|\underline{c}|^2} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) \cdot |\underline{c}| = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|}$

A vektorokat koordinátáit kiszámoljuk, majd ezekből a skalárszorzatot, illetve a $\underline{c}$ vektor hosszát:

$\underline{b} = (6; -2)$ $\quad \underline{c} = (6; 6)$ $\quad \underline{b} \cdot \underline{c} = 36 - 12 = 24$ $\quad |\underline{c}| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

Ezeket behelyettesítve:

$|\underline{t}| = \frac{\underline{b} \cdot \underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{24}{6\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

10.

a.)Az a(−3; 4) és b(1; y) vektorok 60°-os szöget zárnak be egymással. Mekkora az y?

Megoldás:

A két vektor skalárszorzatát kétféleképpen írjuk fel: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -3 + 4y$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(60°) = 5 \cdot \sqrt{1+y^2} \cdot \frac{1}{2}$

Így kapunk *y*-ra egy másodfokú egyenletet:

$$-6+8y=5\sqrt{1+y^2}$$
$$36-96y+64y^2=25+25y^2$$
$$39y^2-96y+11=0$$

Ezt megoldva:

$$y_{1,2}=\frac{96\pm\sqrt{9216-1716}}{78}=\frac{96\pm 50\sqrt{3}}{78}=\frac{48\pm 25\sqrt{3}}{39}$$
$$y_1=2.34$$
$$y_2=0.12$$

A kettő közül azonban csak az első megoldás a jó, mert a másodiknál a két vektor által bezárt szög 120° (a négyzetre emelés miatt, $\cos(120°)=-\frac{1}{2}$).

b.) Határozza meg a skalárszorzat felhasználásával a c = (2, y0, z0) vektort úgy, hogy merőleges legyen az a = (2, 3, 0) és a b = (1, 2, -2) vektorokra!

11. Mekkora szöget zár be egymással egy kocka két kitérő helyzetű lapátlóegyenese?

Megoldás:

Kitérő lapátlók két helyen találhatók.
(1) Két szemközti oldalon. Ekkor a két egyenes által bezárt szög 90°, ez jól látszik.
(2) Két szomszédos oldalon. Ekkor a közös oldalon levő egyik csúcsból kiinduló három oldalvektorát a kockának jelöljük $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$-vel. Ezek közül legyen $\underline{b}$ a közös oldal. A két lapátlót ezek segítségével a következőképpen írhatjuk fel:

$$\underline{u}=\underline{a}+\underline{b}$$
$$\underline{v}=\underline{b}-\underline{c}$$

Az általuk bezárt szöget skalárszorzattal számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{b}-\underline{c})}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}-\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}^2-\underline{b}\cdot\underline{c}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$$

A kocka oldalhossza legyen $d=|\underline{a}|=|\underline{b}|=|\underline{c}|$, ekkor $|\underline{u}|=|\underline{v}|=d\sqrt{2}$. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra, így a skalárszorzatuk nulla. Ezeket felhasználva:

$$\cos\alpha=\frac{d^2}{d^2\sqrt{2}^2}=\frac{1}{2},$$

vagyis a két lapátló által bezárt szög $\alpha=60°$.