Sajátérték, sajátvektor (megoldások)

Feladatok

Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, határozzuk meg az egyes sajátalterek dimenzióját!

1. $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

Megoldás:

A transzformáció sajátértékei a $\det([A-\lambda E]_a)$ polinom gyökei.

$\det([A-\lambda E]_a)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=5,\lambda_2=1$

A sajátvektorok kiszámításához meg kell oldanunk az $(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})\underline{x}=\underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert.

Számítsuk ki a $\lambda_1=5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{array}\right]+II\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\end{array}\right]\rightarrow x_1-3x_2=0\rightarrow x_1=3x_2$$

Tehát a $\lambda_1=5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája a második koordinátának 3-szorosa.

Legyen x_2 p paraméter és így $x_1=3p$. $\underline{s}_1=\begin{bmatrix}3p\\ p\end{bmatrix}$, $p\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például a $\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ vektor sajátvektor.

Ez a sajátaltér egy dimenziós, mert egy paraméterre van szükségünk felírásához (azaz λ_1 (geometriai) multiplicitása egyszeres).

Számítsuk ki a $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{array}\right]+II\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\end{array}\right]\rightarrow x_1+x_2=0\rightarrow x_1=-x_2$$

Így a $\lambda_2=-1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\underline{s}_2=\begin{bmatrix}-q\\ q\end{bmatrix}$, $q\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például a $\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

2. $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

Megoldás:

$\det([A - \lambda E]_a) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$\lambda_1=3$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right] + I \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] / 2 \rightarrow [1 \quad 0 \mid 0] \rightarrow x_1 = 0, x_2 \in R, x_2 \neq 0$$

A $\lambda_1=3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája 0, második koordinátája tetszőleges nemnulla szám. $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix}$, $p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

$\lambda_2=1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] / 2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow [1 \quad 1 \mid 0] \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

A $\lambda_2=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája második koordinátának (-1)szerese. $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -q \\ q \end{bmatrix}$, $q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például a $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

Észrevehettük, hogy egy háromszög mátrix sajátértékei megegyeznek a főátlóban található elemekkel.

3. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda) - 0] + 2[0 - (1-\lambda)] = (3-\lambda)(4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2) - 2 + 2\lambda =$$

$$= 12 - 3\lambda - 12\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda + \lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$$

λ_1	-1	8	-17	10
1	-1	7	-10	0

λ_2	-1	8	-17	10

2	-1	6	-5	0

λ_3	-1	8	-17	10
5	-1	3	-2	0

$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=5$

$\lambda_1=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} /1 \\ elhagy \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] - II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array}$$

$s_1 = \begin{bmatrix} -p \\ -2p \\ p \end{bmatrix}$, $p \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

$\lambda_1=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] - III \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} *(-1) \\ elhagy \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] - I \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_3 \end{array}$$

$s_2 = \begin{bmatrix} -2p \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$, $p \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

$\lambda_3=5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} /(-2) \\ /(-4) \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] - II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] elhagy \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{array}$$

$s_3 = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$, $p \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

4. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & -5-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(-5-\lambda)(1-\lambda)+9\right] - 3\left[(-3)(1-\lambda)+9\right] + 3\left[-9-3(-5-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4) + 9 - 9\lambda - 27 - 27 + 45 + 9\lambda =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 9 - 9\lambda - 27 - 27 + 45 + 9\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

λ_1	-1	-3	0	4
1	-1	-4	-4	0

λ_2	-1	-3	0	4
-2	-1	-1	2	0

$\lambda_1=1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-2$ A -2 kétszeres multiplicitású, hiszen: $-(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0$

$\lambda_1=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] + III \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] + I \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} /3 \\ elhagy \\ /3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_2 = -x_1 \end{array}$$

$s_1 = \begin{bmatrix} -p \\ p \\ -p \end{bmatrix}$, $p \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

$\lambda_{2,3}=-2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} + I \\ \\ - I \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} /3 \\ elhagy \\ elhagy \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

$s_{2,3} = \begin{bmatrix} -p-q \\ p \\ q \end{bmatrix}$, $p, q \in$ R\{0}, = p $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ + q $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ez a sajátaltér kétdimenziós.

/Összeállította: Molnár Tamás/

Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

1.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Milyen Mátrix a fenti mátrix? – szimmetrikus

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 4X + 3$$

Value	Multiplicity	Vector
3	1	(1,1)
1	1	(1,-1)

2.)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$$

det(A) = -29

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 28X - 29$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
29	1	(1,-1)
-1	1	(1,1)

3.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - 27X + 54$$

Value	Multiplicity	Vector
-6	1	(1,2,-2)
3	2	(1,0,1/2), (0,1,1)

Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

1.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A) = 1

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 2X + 1$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
1	2	(1,0), (0,1)

2.)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A) = -1

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 1$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
-1	1	(1,0)
1	1	(0,1)

3.)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A) = 8

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 9X + 8$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
1	1	(0,1)
8	1	(1,16/7)

4.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

det(A) = 0

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 3X$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
0	1	(1,-1/2)
3	1	(1,1)

5.)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$$

det(A) = -29

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 28X - 29$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
29	1	(1,-1)
-1	1	(1,1)

6.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

det(A) = -1

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - X^2 - X + 1$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
-1	1	(1,0,-1)
1	2	(1,0,1), (0,1,0)

7.)

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 7 & 17 \\ -4 & 1 & 4 \\ -10 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

det(A) = 6

Karakterisztikus polinomja: $X^3 + 2X^2 - 5X - 6$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
-3	1	(1,1/2,1/2)
-1	1	(1,2,0)
2	1	(1,0,1)

8.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

det(A) = 16

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - 12X - 16$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
4	1	(1,1,2)
-2	2	(1,0,-1), (0,1,1)

9.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

det(A) = 22

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - 14X^2 + 35X - 22$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
2	1	(1,-3/2,-2)
11	1	(1,3,-2)
1	1	(1,-1,0)

10.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

det(A) = 12

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - 8X^2 + 19X - 12$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
3	1	(1,1,0)
4	1	(1,1,1)
1	1	(1,-1,0)

11.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A) = 0

$$\text{characteristic polynomial} = X^4 - 4X^3 + 4X^2$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
2	2	(1,0,0,1), (0,1,1,0)
0	2	(1,0,0,-1), (0,1,-1,0)

12.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

det(A) = 0

$$\text{characteristic polynomial} = X^4 - 14X^3 - 72X^2$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
18	1	(1,13/5,13/5,1)
-4	1	(1,1,-1,-1)
0	2	(1,0,-3,2), (0,1,-2,1)

Számítsuk ki a megadott mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, ill. vizsgáljuk meg, hogy az egyes sajátalterek hány dimenziósak!

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

A transzformáció sajátértékei a det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$) polinom gyökei.

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$)=$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

A sajátvektorok kiszámításához meg kell oldanunk az $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert.

Számítsuk ki a λ_1=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] + II \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

Tehát a λ_1=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első és második koordinátái megegyeznek. $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix}$, $p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

Számítsuk ki a λ_2=-1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] - II \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

Tehát a λ_2=-1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája második

koordinátának (-1)szerese. $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix}, q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például az $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Tudjuk, hogy ha a mátrix diagonális, akkor a főátlóban a sajátértékek szerepelnek. Így ez esetben a transzformáció sajátértéke λ=-1. Továbbá a középpontos tükrözés során egy vektor képe egy vele egy egyenesbe eső, de ellentétes irányú vektor lesz, így a

λ=-1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, p, q, r \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor.

Ez a sajátaltér három dimenziós.
Így tehát a sajátaltér 3 dimenziós.

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A transzformáció sajátértékei a det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$) polinom gyökei.

det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$)=$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Számítsuk ki a λ_1=2 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] + I \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_2 = 0, x_1 \in R, x_1 \neq 0$$

Tehát a λ_1=2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája tetszőleges nemnulla szám, második koordinátája pedig 0. $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}, p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

Számítsuk ki a λ_2=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

Tehát a λ_2=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok olyan vektorok, melyek első koordinátája második koordinátának (-1)szerese. $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} q \\ -q \end{bmatrix}, q \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Így például az $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

A transzformáció sajátértékei a det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$) polinom gyökei.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right] + (-1)\left[2-2(2-\lambda)\right] = (1-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2) + (-1)(-2+2\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) + 2 - 2\lambda = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) + 2(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

A sajátvektorok kiszámításához meg kell oldanunk az $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert.

Számítsuk ki a λ_1=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ -2\cdot II \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] - I \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$s_1 = \begin{bmatrix} p \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$, $p \in$ R\{0}, tehát például a $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor λ_1=1-hez tartozó sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

Számítsuk ki a λ_2=2 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +I \\ +2\cdot I \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ /2 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$s_2 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ -q \end{bmatrix}$, $q \in$ R\{0}, tehát például a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor λ_2=2-hez tartozó sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

Számítsuk ki a λ_3=3 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] sorcsere \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +III \\ +2I \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +II \\ \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}$$

$s_3 = \begin{bmatrix} r \\ r \\ 2r \end{bmatrix}, r \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektor λ_3=3-hez tartozó sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

A transzformáció sajátértékei a det($[\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}]_a$) polinom gyökei.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda)-4\right] + (-4)\left[4(2-\lambda)-4\right] + 2(8-2(5-\lambda)) =$$

$$= (5-\lambda)\left[6-7\lambda+\lambda^2\right] + (-4)(4-4\lambda) + 2(-2+2\lambda) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-6) - 16(1-\lambda) + 4(\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)\left[(5-\lambda)(\lambda-6)+20\right] = (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10) = (\lambda-1)(\lambda-1)(10-\lambda)$$

$$(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10$$

Számítsuk ki a $\lambda_{1,2}$=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] - I \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] (-2)II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = -2x_1 - 2x_2 \end{array}$$

$sv_{1,2} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -2p-2q \end{bmatrix}, p, q \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$ vektor $\lambda_{1,2}$=1-hez tartozó sajátvektor. Ez a sajátaltér két dimenziós.

Számítsuk ki a λ_3=10 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -II \\ +4III \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 0 \\ -18 & 18 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ +2II \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] /9 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] + 5II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & \\ 1 & -1 & 0 & \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \rightarrow x_1 = x_2 = 2x_3$$

$sv_3 = \begin{bmatrix} r \\ r \\ r/2 \end{bmatrix}, r \in \mathrm{R}\backslash\{0\}$, tehát például a $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor λ_3=10-hez tartozó sajátvektor. Ez a sajátaltér egy dimenziós.

f) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda) * \{(3-\lambda)*(2-\lambda) - 2\} - 2*((2-\lambda)-1) + 2 - (3-\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5 = 0.$

Az egyik gyök az 1. Polinomosztással pedig megkapható a másik két gyök, melyekről kiderül, hogy az egyik szintén az 1, azaz az 1 kétszeres multiplicitással bír, a harmadik gyök pedig az 5.
A polinom gyökei: $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=5$.

a.) $\lambda_{1,2}$=1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:

[1 2 1|0] [1 2 1|0] -> x + 2y + z = 0, x=-2y - z
[1 2 1|0] [0 0 0|0] p=y
[1 2 1|0] => [0 0 0|0] q=z

$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -2p-q \\ p \\ q \end{Bmatrix}$, ahol p,q∈**R**\{0}. Más alakban: $\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} p + \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} q.$

Konkrét példa: $\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, p=1, q=2.

A sajátaltér 2 dimenziós.

b.) λ_3 =5-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[-3 2 1|0] +3*II [0 -4 4|0] [0 0 0|0]
[1 -2 1|0] -III [0 -4 4|0] [0 -1 1|0] -> -y + z = 0, y=z
[1 2 -3|0] => [1 2 -3|0] => [1 2 -3|0] -> x + 2y -3z = 0, x= -2y + 3z = -2z + 3z = z

sz=z

$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} sz \\ sz \\ sz \end{Bmatrix}$, ahol sz∈**R**\{0}. Más alakban: $\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} sz.$

A sajátaltér 1 dimenziós.

g) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -15 & 7 & 17 \\ -4 & 1 & 4 \\ -10 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}}) = \begin{bmatrix} -15-\lambda & 7 & 17 \\ -4 & 1 & 4 \\ -10 & 5 & 12-\lambda \end{bmatrix} = (-15-\lambda) * \{(1-\lambda)*(12-\lambda) - 20\} - 7*(-4*(12-\lambda) + 40) + 17*(-20 + 10*(1-\lambda)) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6.$

A polinom gyökei: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-3$.
a.) λ_1=2-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[-17 7 17|0] +*7*II* [-45 0 45|0] -> -45x + 45z = 0, x=z
[-4 -1 4|0] [-4 -1 4|0]
[-10 5 10|0] *-2,5*II* => [0 7,5 0|0] -> 7,5 y = 0, y=0

gy=x
$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} gy \\ 0 \\ gy \end{Bmatrix}$, ahol gy∈**R**\{0}. Más alakban: $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ gy.

A sajátaltér 1 D-s.

b.) λ_2 =-1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása
[-14 7 17|0] *-3,5*II* => [0 0 3|0] -> z=0
[-4 2 4|0] => [-2 1 2|0] -> -2x + y + 2z = 0 -> y = 2x
[-10 5 13|0] *-2,5*II* => [0 0 3|0] -> z=0

p=x
$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} p \\ 2p \\ 0 \end{Bmatrix}$, ahol p∈**R**\{0}. Más alakban: $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$ p.

A sajátaltér 1 D-s.

c.) λ_2 =-3-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása
[-12 7 17|0] [-12 7 17|0] *-7*II* -> [-5 0 10|0] -> [-1 0 2|0] -> -x + 2z = 0 -> x=2z
[-4 4 4|0] => [-1 1 1|0] [-1 1 1 |0] *-III* -> [0 1 -1|0] -> y - z = 0 -> y = z
[-10 5 15|0] [-2 1 3|0] *-II* -> [-1 0 2 |0]

ty=z
$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} 2\,ty \\ ty \\ ty \end{Bmatrix}$, ahol ty∈**R**\{0}. Más alakban: $\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ty.

A sajátaltér 1 D-s.

h) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ =(3-λ)*(2- λ)*(4- λ) – 2*2*(4- λ) + 2*(-2)*(2- λ) = $-\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+24$
$+4\lambda-16-8+4\lambda=-\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda=0$

A polinom gyökei: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.
a.) λ_1=0-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:
[3 2 2|0] *–II* [1 0 2|0]
[2 2 0|0] [1 1 0|0] [1 1 0|0] -> x + y = 0 -> y=-x
[2 0 4|0] => [1 0 2|0] *–I* => [1 0 2|0] -> x + 2z = 0 -> z=-1/2x

zs=x

$\underline{s_1}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$zs, ahol zs∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_2 =3-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása

[0 2 2] [0 1 1|0]
[2 -1 0] [2 -1 0|0] -> 2x –y = 0 -> x=1/2y
[2 0 1]-*II* => [0 1 1|0] -> y + z = 0 -> z= -y

ly=y

$\underline{s_2}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ly, ahol ly∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

c.) λ_2 =6-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása

[-3 2 2|0] +*III* [-1 2 0|0]
[2 -4 0|0] [1 -2 0|0] -> x – 2y = 0 -> x=2y
[2 0 -2|0] => [1 0 -1|0] -> x – z = 0 -> x=z

ny=x

$\underline{s_3}=\left\{\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$ ny, ahol ny∈**R**\{0}.

i) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & -1 & -1\end{bmatrix}$

$\det(\underline{A}-\lambda\underline{E})=\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\0 & 1-\lambda & 0\\3 & -1 & -1-\lambda\end{bmatrix}$ = (-1- λ)*(2- λ)*(1- λ)

(Előnyös a 2. sor vagy a 3. oszlop szerinti kifejtést számolni, én ezutóbbit írtam fel. Ekkor rögtön megkapjuk a gyököket a tényezős felbontásból.)

A polinom gyökei: λ_1=1, λ_2=-1, λ_3=2.

a.) λ_1=0-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[1 -1 0|0]
[0 0 0|0] [1 -1 0|0] [1 -1 0|0] -> x – y = 0 -> x=y
[3 -1 -2|0] –*I* => [2 0 -2|0] => [1 0 -1|0] -> x – z = 0 -> x=z

a=x

$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ a, ahol a∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_2 =-1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása
[3 -1 0|0]
[0 2 0|0] [0 1 0|0] -> y=0
[3 -1 0|0] $+0,5*II$ => [3 0 0|0] -> x=0

b=z
$\underline{s}_2=\begin{Bmatrix}0\\0\\b\end{Bmatrix}$, ahol b∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

c.) λ_3 =2-hez tartozó sajátvektor kiszámítása
[0 -1 0|0]
[0 -1 0|0] [0 1 0|0] -> y=0
[3 -1 -3|0] $-II$ => [1 0 -1|0] -> x – z = 0 -> x=z

c=x
$\underline{s}_3=\begin{Bmatrix}c\\0\\c\end{Bmatrix}$, ahol c∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

j) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}3&-3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

A transzformáció sajátértékei a det($[\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}]_a$) polinom gyökei.

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&-3&1\\1&-\lambda&0\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&0\\1&-\lambda\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-\lambda\\0&1\end{vmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)(\lambda^2)-3\lambda+1=-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1=(1-\lambda)^3$$

$$(1-\lambda)^3=0\Rightarrow\lambda_{1,2,3}=1$$

Számítsuk ki a $\lambda_{1,2,3}$=1 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&0\\1&-1&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\2&-3&1&0\end{array}\right]-2I\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right]+II\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{array}{l}x_1-x_2=0\\x_2-x_3=0\end{array}\rightarrow x_1=x_2=x_3$$

$sv_{1,2,3} = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \end{bmatrix}$, $p \in$ R\{0}, tehát például a $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor $\lambda_{1,2,3}$=1-hez tartozó sajátvektor.

Így a sajátaltér 1 dimenziós.

/Összeállította: Sonneveld Ilona/

1.) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

λ_1=3 $\underline{s}_1=\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$

λ_2=2 $\underline{s}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$

2.) $\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

λ_1=2 $\underline{s}_1=\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

λ_2=3 $\underline{s}_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}p \\ p \end{bmatrix}$

3.) $\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_{1,2}$=1 $\underline{s}_1=\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ 2t \end{bmatrix}$

λ_3=10 $\underline{s}_2=\begin{bmatrix} 2q \\ 2q \\ q \end{bmatrix}$

4.) $\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{D}}-\lambda\underline{\underline{E}})=\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$ = (-λ)*(3-λ)*(5-λ) – 2*(5-λ) + 2*2*4 = $-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$

’Megsejtjük’ , hogy az egyik gyök az 1. Kiszámolva megbizonyosodhatunk róla, hogy ez megfelelő. (Amennyiben zárthelyin 3*3-as mátrix lenne a feladvány, a polinom így harmadfokú, általában a 0,

+-1, +- 2 egyike biztosan megoldás, érdemes kipróbálni őket, utána már tovább lehet haladni, mint másodfokú egyenlet. Erre is több lehetőség van, kiemeléssel, polinom osztással is megoldható.)

Egy ilyen alakot szeretnénk elérni: $(\lambda- \lambda_1)^* (\lambda- \lambda_2)^* (\lambda- \lambda_3) = 0$, ahol λ_1, λ_2, λ_3 a sajátértékeket jelölik. Ezek konstans számok, ezekre vagyunk kíváncsiak. Ezek szorzata is konstans. Ha ránézünk az egyenletre, láthatjuk, hogy a konstansunk a 6. Így ez alapján is következtethetünk a sajátértékekre, mivel a konstans tag a 3 sajátérték szorzataként jön ki (a konstansunk osztói közül kerülnek ki az egész gyökök). A következőképpen alakulhatnak a sajátértékeink ebben az esetben tetszőleges sorrendet nézve(amennyiben egész sajátértékeket veszünk természetesen) : 1*1*6; 1*2*3. Azaz innen is sejthető, hogy az egyik sajátérték az 1 lesz.

Polinom osztással számolva ki a másik két gyököt:
$(\lambda-1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 6) = 0$.
Így a gyökök a következőek: $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_3=6$.

a.) $\lambda_{1,2}$=1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:

[-1 1 2|0] +0,5*II [0 2 2|0] [0 1 1|0] -> y+z = 0 -> z=-y
[2 2 0|0] [2 2 0|0] [1 1 0|0] ->x+y = 0 -> x=-y
[0 4 4|0] => [0 4 4|0] => [0 0 0|0]

$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -t \\ t \\ -t \end{Bmatrix}$, ahol t∈**R**\{0}. Ez felírható a következő alakban is: $\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$.

A sajátaltér itt 1 dimenziós.

b.) λ_3 =6-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[-6 1 2|0] +2*III [-6 9 0|0] +3*II [0 0 0|0]
[2 -3 0|0] [2 -3 0|0] [2 -3 0|0] -> 2x – 3y = 0, x = 3/2 y
[0 4 -1|0] => [0 4 -1|0] => [0 4 -1|0] -> 4y – z = 0, z = 4 y

$\underline{s}_2=\begin{Bmatrix} \frac{3}{2}\,zs \\ zs \\ 4\,zs \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{Bmatrix}$ zs, ahol zs∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1 dimenziós.

A feladatokban szereplő paraméterek mindegyikére igaz, hogy: paraméter∈**R**\{0}.

/Összeállította: Bércesné Dr. Novák Ágnes/

1.) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

A mátrix diagonális, így a sajátértékek egyből leolvashatóak, hiszen a fődiagonálisban állnak. /Tétel volt, hogy amennyiben a mátrix diagonális, a sajátértékek a fődiagonálban állnak rendre. Ez számolással is bizonyítható, ebből a mátrixból is kifejezhetőek a sajátértékek determináns számolással: $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$. Belegondolva, azért olvashatóak le a diagonális mátrix sajátértékei, mivel azok a vektor hosszának változását eredményezik, irányát nem változtatják meg. /

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=5$.
a.) λ_1=2-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:
[0 0|0]
[0 3|0] => 3y=0 -> y=0, x∈**R**\{0}.
$\underline{s}_1=\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$, p∈**R**\{0}. Konkrét példa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ezen vektorok az x tengelyt jelentik.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_2 =5-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:
[-3 0|0] => -3x=0 -> x=0, y∈**R**\{0}.
[0 0|0]
$\underline{s}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$, q∈**R**\{0}. Konkrét példa: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Ezek a vektorok pedig az y tengelyt adják.

A sajátaltér itt is 1 D-s, mivel ismételten csak egy paramétert használtunk.

2.) $\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{D}}-\lambda\underline{\underline{E}})=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 7-\lambda \end{bmatrix}$ = (1- λ)*(7- λ) – 4*9 = λ^2 - 8 λ – 36=0.

Az egyenlet gyökei: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$.
a.) λ_1=1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:
[0 4|0] [0 4|0] [0 1|0]
[9 6|0] *-1,5*I* => [9 0|0] => [1 0|0] -> x=0, y=0.
$\underline{s}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b.) λ_2 =9-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:
[-8 4|0] *+2*II* [10 0|0] [10 0|0]
[9 -2|0] => [9 -2|0] *-0,9*I* => [0 -2|0] -> x=0, y=0.
$\underline{s}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.) $\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{F}-\lambda\underline{E})=\begin{bmatrix}4-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 4-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{bmatrix}=(4-\lambda)^3=0$

A sajátérték $\lambda_{1,2,3}=4$. A gyök háromszoros multiplicitással bír.
A behelyettesítés után nullmátrixot kapunk: [0 0 0|0]
[0 0 0|0]
[0 0 0|0].

Így a sajátvektorra a következőt kapjuk: $\underline{s}=\begin{Bmatrix}p\\ q\\ r\end{Bmatrix}$, ahol p,q,r ∈**R**\{0}. Konkrét példa: $\begin{Bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{Bmatrix}$.

A sajátaltér 3 dimenziós a három paraméter miatt.

4.) $\underline{D}=\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\\ -6 & -8 & 4\\ -6 & -9 & 5\end{bmatrix}$

$\det(\underline{D}-\lambda\underline{E})=\begin{bmatrix}4-\lambda & 3 & -1\\ -6 & -8-\lambda & 4\\ -6 & -9 & 5-\lambda\end{bmatrix}=(4-\lambda)*\{(-8-\lambda)*(5-\lambda)-(-9)*(-1)\}-3*\{(-6)*(5-\lambda)-(-6)*4\}-$

$\{(-6)*(-9)-(-6)*(-8-\lambda)\}=-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4=0$

Könnyen látható, hogy a $\lambda_1=1$ gyöke a polinomnak, így polinomosztással a másodfokú egyenlet:
$(-\lambda^2+4)=0 \rightarrow \lambda_2=2, \lambda_3=-2$

a.) λ_1=1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:

[3 3 -1|0]
[-6 -9 4|0] +4*I [3 3 -1|0] –II [-3 0 -1|0] [3 0 1|0] -> 3x + 1z = 0 -> z = -3x
[-6 -9 4|0] –II => [6 3 0 |0] => [2 1 0|0] => [2 1 0|0] -> 2x + 1y = 0 -> y = -2x

x=p
$\underline{s_1}=\begin{Bmatrix}1\\ -2\\ -3\end{Bmatrix}$ p, ahol p∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_1=2-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[2 3 -1|0]
[-6 -10 4|0] +3*I [2 3 -1|0] +II [2 2 0|0] [1 1 0|0] -> x + y = 0 -> x = -y
[-6 -9 3|0] +3*I => [0 -1 1|0] => [0 -1 1|0] => [0 -1 1|0] -> -y + z = 0 -> z = y

y = gy

$\underline{s_2}=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$ gy, ahol gy∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

c.) λ_1=-2-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[6 3 -1|0] [6 3 -1|0] + II
[-6 -6 4|0] + I [0 -3 3 |0] [6 0 2|0] [3 0 1|0] -> 3x + 1z = 0 -> z = -3x
[-6 -9 7|0] + I => [0 -6 6|0] => [0 -1 1|0] => [0 -1 1|0] -> -1y + z = 0 -> y = z

z = h

$\underline{s}_3=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ h, ahol h∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

5.) $\underline{\underline{F}}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{F}}-\lambda\underline{\underline{E}})=\begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ = (-1- λ)*(-2- λ)*(-3- λ) – (-2)*(-1)*(-3- λ) + 2*{(-1)*1 – (-1)*

(-2- λ)} = - λ^3 - 6 λ^2 - 11 λ -6 = 0
Láthatjuk, hogy a λ_1=-1 gyöke a polinomnak. Így polinomosztással a másodfokú egyenlet:
(-λ^2 - 5 λ – 6) = 0 => λ_2 = -2; λ_3 = -3.

a.) λ_1=-1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:

[0 -2 2|0] [0 -1 1|0]
[-1 -1 0|0] [1 1 0|0] [0 -1 1|0] -> -y + z = 0 -> z = y
[-1 1 -2|0] – II => [0 2 -2|0] +2*I => [1 1 0|0] -> x + y = 0 -> x = -y

y = a
$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ a, ahol a∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_1=-2-höz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[1 -2 2|0] + II [0 -1 1|0]
[-1 0 0|0] [1 0 0|0] [0 -1 1|0] -> -y + z = 0 -> z = y
[-1 1 -1|0] +II => [0 1 -1|0] + I => [1 0 0|0] -> x = 0

z = b

$\underline{s}_2=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ b, ahol b∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

c.) λ_1=-3-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[2 -2 2|0] +2*II
[-1 1 0|0] [0 0 1|0] -> z = 0
[-1 1 0|0] –II => [-1 1 0|0] -> -x + y = 0 -> y = x

y = c

$\underline{s}_3=\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}$ c, ahol c∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1 D-s.

6.) $\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 2\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

$\det(\underline{\underline{G}}-\lambda\underline{\underline{E}})=\begin{bmatrix}2-\lambda & -3 & 2\\ -1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & 3 & -1-\lambda\end{bmatrix}$ = (2- λ)*{(3- λ)*(-1- λ) – (-1)*3} – (-3)*{(-1)*(-1- λ) – (-1)*(-1)} +

2*{(-1)*3 – (-1)*(3- λ)} = - λ^3 + 4 λ^2 - 3 λ = 0

Az egyenletből rögtön látszik (mivel nincs konstans tag), hogy a λ_1=0 gyöke az egyenletnek.
Polinomosztást végezve a következő a másodfokú egyenletünk:
(-λ^2 + 4 λ – 3) = 0 => λ_2 = 1; λ_3 = 3.

a.) λ_1=0-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[2 -3 2|0] +II
[-1 3 -1|0] [1 0 1|0] [1 0 1|0] -> x + z = 0 -> x = -z
[-1 3 -1|0] –II => [-1 3 -1|0] +I => [0 1 0|0] -> y = 0

z=q
$\underline{s}_1=\begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}$ q, ahol q∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1D-s.

b.) λ_1=1-hez tartozó sajátvektor kiszámítása:

[1 -3 2|0] +III [0 0 1|0] [0 0 1|0] [0 0 1|0] -> z = 0
[-1 2 -1|0] -III [0 1 1|0] –I [0 1 0|0] [0 1 0|0] -> y = 0
[-1 3 0|0] => [-1 3 0|0] => [-1 3 0|0] -3*II => [1 0 0|0] ->x = 0

$\underline{s}_2=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$.

A sajátaltér 0D-s.

c.) λ_1=3-hoz tartozó sajátvektor kiszámítása:

[-1 -3 2|0] -II [0 -3 3|0]
[-1 0 -1|0] [1 0 1|0] [0 -1 1|0] -> -y + z = 0 -> y = z
[-1 3 -4|0] +I => [-2 0 -2|0] +2*II => [1 0 1|0] -> x + z = 0 -> x = -z

z = r

$\underline{s}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ r, ahol r∈**R**\{0}.

A sajátaltér 1 D-s.