Sajátérték, sajátvektor (csak példák)

Feladatok

Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, határozzuk meg az egyes sajátalterek dimenzióját!

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Gyakorlati alkalmazás

- A molekulák gráfjainak szomszédsági mátrixainak sajátértékei fontos szerepet játszanak, például a molekulák energiaszintjeinek becslésében.
- Gráfelmélet: gráfok spektrumának (sajátértékhalmazainak) vizsgálata, rengeteg gráfinvariáns becsülhető a gráf sajátértékeivel.
- A váltóáramú elektromos hálózatok gráfjaihoz rendelt mátrixok sajátértékei fontos fizikai jelentéseket hordoznak.
- Hatalmas véletlen gráfok legnagyobb sajátértékei jól becsülhetők randomizált módszerekkel, konstans idő alatt. Ezt fel lehet használni webes keresőprogramokban.

Wolfram Alpha parancsok

- `eigenvalues {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}`
- `eigenvectors {{a,b,c},{d,e,f},{g,h,i}}`

Hasznos weboldalak

- http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalue,_eigenvector_and_eigenspace

- http://mathworld.wolfram.com/Eigenvector.html
- http://mathworld.wolfram.com/Eigenvalue.html
- http://web.mit.edu/18.06/www/Demos/eigen-applet-all/eigen_sound_all.html

/Összeállította: Molnár Tamás/

Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

1.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$$

3.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Adja meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

1.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$$

4.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -15 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$$

6.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.)

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 7 & 17 \\ -4 & 1 & 4 \\ -10 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

8.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

9.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

10.)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

11.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki a megadott mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait, ill. vizsgáljuk meg, hogy az egyes sajátalterek hány dimenziósak!

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

f) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

g) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -15 & 7 & 17 \\ -4 & 1 & 4 \\ -10 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

h) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

i) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

j) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

/Összeállította: Sonneveld Ilona/

1.) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2.) $\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

3.) $\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4.) $\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

/Összeállította: Bércesné Dr. Novák Ágnes/

1.) $\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

2.) $\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$

3.) $\underline{\underline{C}}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4.) $\underline{\underline{D}}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & 4 \\ -6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$

5.) $\underline{\underline{F}}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

6.) $\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Honlapok:

http://www.math.bme.hu/algebra/a2/2009/5_Sajatertek.000.pdf

http://www.math.bme.hu/~pollux/a2/sajat.pdf

http://algebra.math.ust.hk/eigen/01_definition/lecture2.shtml

http://www.ms.uky.edu/~lee/amspekulin/eigenvectors.pdf

Ezeken az oldalokon találtok még példákat megoldva, ha gyakorlásra lenne szükségetek.

/Összeállította: Weltz Boglárka/