Mátrixalgebra

Elméleti bevezető

Def. (mátrix): Legyen T egy kommutatív test, k, n pozitív egészek! A test feletti $k \times n$-es mátrix egy téglalap alakú táblázat, melynek k sora és n oszlopa van, elemei pedig T-ből valók.

Adott test feletti mátrixok az összeadással és skalárral való szorzással vektorteret alkotnak a test felett.

A mátrixszorzás:

- $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}})=(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}}$
- $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}\underline{\underline{C}}$
- $(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}}\underline{\underline{A}}$
- $(\lambda\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})=(\lambda\underline{\underline{A}})\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{A}}(\lambda\underline{\underline{B}})$

A mátrixszorzás másik értelmezése:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{bmatrix}$$

Az inverz mátrix kiszámítása Gauss-algoritmussal (amennyiben az létezik):

Felhasználjuk: $\underline{\underline{A}}*\underline{\underline{A}}^{-1}=\underline{\underline{E}}$

Emiatt ha $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ és $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$, akkor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixszorzás interpretációja miatt így az alábbi egyenletrendszereket kell megoldani:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel az együtthatómátrixa mindhárom egyenletrendszernek ugyanaz, így a Gauss-elimináció egyszerre is elvégezhető, azaz az együtthatómátrix mellé leírjuk a megfelelő egységmátrixot, majd elvégezzük a szokott módon a kiküszöbölést.

Az inverz mátrix másik kiszámítása (biz. nélkül):

Használjuk fel, hogy $\underline{\underline{A}}*\underline{\underline{A}}^*=det(\underline{\underline{A}})*\underline{\underline{E}}$, így az $\underline{\underline{A}}$ mátrix inverze (ha az létezik): $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * A^*$

$$A^* = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} & \cdots & D_{n2} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & \cdots & D_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{3n} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

Speciálisan kétszer kettes mátrixra:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \; A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Megj.: a mátrix invertálhatóságával ekvivalens pl. az, hogy a mátrix determinánsa nem nulla.

Cramer-szabály: adott az $\underline{\underline{A}}*\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszer, ahol $\underline{x}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ha $det(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, akkor létezik egyértelmű megoldás, ez pedig $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, ahol $\underline{\underline{A}}_i$-t úgy nyerjük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix *i.* oszlopvektorát $\underline{b}$-re cseréljük.

Feladatgyűjtemény

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 22 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = ?$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$
3. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = ?$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = ?$
5. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$

7. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = ?$

8. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ?$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = ?$

10. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = ?$

Invertáljuk az alábbi mátrixokat:

11. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 12 & -12 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 16 & 11 \end{bmatrix}$

Oldjuk meg az egyenletrendszert inverz mátrix segítségével:

20. $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 6 \\ \underline{y + z = 1} \end{array}\right\}$

Határozzuk meg annak a kvadratikus alaknak mátrixát, amibe az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektort helyettesítve ugyanazt a polinomot kapjuk, mint abba a bilineáris függvénybe helyettesítve, aminek mátrixa a következő:

21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Határozzuk meg azon kvadratikus alakok mátrixait, amikbe az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektort helyettesítve az alábbi polinomokat kapjuk:

22. $13x^2 + 10xy + 13y^2$
23. $x^2 + 4xy + 4y^2$
24. $4(xy + yz + xz)$
25. $2x^2 + 2xy + 2y^2$
26. $-4x^2 + 2xy - y^2$

Oldjuk meg az alábbi szöveges feladatokat:

27. A pincészet tulajdonosa feljegyezte, hogy egy nap hány litert sikerült eladnia az egyes borokból. Az egyik hét adatait a táblázat tartalmazza:

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Medina	10	8	5	9	7
Olaszrizling	15	4	6	13	5
Királyleányka	5	5	1	6	3
Cserszegi fűszeres	7	3	2	8	1

a. Hány liter bort adtak el összesen az egyes napokon?
b. Hány liter bort adtak el az egyes fajtákból összesen a héten?
c. Az egyes borok egységárait tartalmazza a táblázat (Ft/l mértékegységben):

Medina	400
Olaszrizling	350
Királyleányka	350
Cserszegi fűszeres	300

Mekkora volt a bevétel kedden és szerdán?

28. Egy taxisofőr számolta, hogy a hét egyes napjain az egyes napszakokban hány embert fuvarozott. Az adatokat az alábbi táblázat tartalmazza:

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat
Hajnalban	2	3	1	4	0	0
Reggel	3	1	1	3	0	0
Délben	0	1	0	2	1	0
Este	5	2	0	0	2	10

a. Hány embert szállított szerdán?
b. Ha egy ember átlag 1000 Ft-ért utazik, akkor mekkora bevétele volt pénteken?
c. Összesen hányan utaztak hétfő hajnalban és reggel (külön és együtt)?
d. Mennyivel több ember utazott szombaton, mint csütörtökön?

29. Egy könyvkiadó számolta, hogy az egyes írók könyveiből mennyi fogyott a hét napjain. Az adatokat az alábbi táblázat tartalmazza:

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
Isaac Asimov	1	0	4	0	4
C. G. Jung	0	0	0	3	2
Fekete István	0	5	1	1	2

K. B. Rottring	1	1	3	2	3
Wass Albert	1	0	3	2	1

a. Mennyivel több könyvét adták el Wass Albertnek, mint Jungnak?
b. Ha Asimov könyvei átlag 2000 Ft-ba, Rottring könyvei pedig 700 Ft-ba kerülnek, akkor mennyivel keresett többet a kiadó Asimov könyveinek az eladásával?
c. Ha Fekete Istvánnak hány könyvét adták el a héten?
d. Kedden hány könyv kelt el?

Megoldások

1. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 26 & 3 & 12 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$
2. A mátrix nem létezik, különböző típusú mátrixok nem adhatók össze.
3. $\begin{bmatrix} 52 & 30 & 34 \\ 50 & 34 & 34 \\ 38 & 14 & 27 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 28 & 36 & 19 \end{bmatrix}$
5. A szorzat nem létezik, *n*×*k*-as mátrix csak *k*×*r*-essel szorozható össze.
6. $\begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 16 & 30 & 18 \\ 14 & 100 & 54 \\ 17 & 40 & 29 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 16 & 56 & 40 \\ 7 & 90 & 56 \\ 2 & 54 & 39 \end{bmatrix}$ (Megj.: a mátrixszorzás nem asszociatív!)
11. $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] - 2(II) \to \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] - I \to \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] / 2 \to \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right] sorcsere$
$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$
12. adj(A)= $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$
13. Nem invertálható.
14. $D_{11}=1, D_{12}=-1, D_{13}=1$
$D_{21}=1, D_{22}=1, D_{23}=-1$
$D_{31}=-5, D_{32}=1, D_{33}=1$
$\Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} 0 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,5 \\ 1 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}$
17. Nem invertálható.
18. $\begin{bmatrix} -1/65 & 7/65 \\ 2/13 & -1/13 \end{bmatrix}$
19. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 16 & 11 \end{bmatrix}$
20. $Ax=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}=b \Rightarrow x = A^{-1}b$

    Kiszámoljuk A^{-1}-t:

    det(A)=1

    $D_{11}=1$, $D_{12}=-1$, $D_{13}=1$

    $D_{21}=0$, $D_{22}=1$, $D_{23}=-1$

    $D_{31}=-1$, $D_{32}=0$, $D_{33}=1$

    $\Rightarrow \mathrm{adj}(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ (det(A)=1)

    $x=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ x=1, y=4, z=-3

21. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 8xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
22. $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$
23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
24. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
25. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
26. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

27. A megoldásokat az egyes vektorok tartalmazzák:

a. $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 8 & 5 & 9 & 7\\15 & 4 & 6 & 13 & 5\\5 & 5 & 1 & 6 & 3\\7 & 3 & 2 & 8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 20 & 14 & 36 & 16\end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix}10 & 8 & 5 & 9 & 7\\15 & 4 & 6 & 13 & 5\\5 & 5 & 1 & 6 & 3\\7 & 3 & 2 & 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39\\43\\20\\21\end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix}400 & 350 & 350 & 300\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 8 & 5 & 9 & 7\\15 & 4 & 6 & 13 & 5\\5 & 5 & 1 & 6 & 3\\7 & 3 & 2 & 8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7250 & 5050\end{bmatrix}$$

28. A megoldásokat az egyes vektorok tartalmazzák:

a. $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0\\3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix}1000 & 1000 & 1000 & 1000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0\\3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3000\end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0\\3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

d. $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0\\3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\5 & 2 & 0 & 0 & 2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

29. A megoldásokat az egyes vektorok tartalmazzák:

a. $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 3 & 2\\0 & 5 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 2 & 3\\1 & 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\\9\\10\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\5\\9\\10\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 3 & 2\\0 & 5 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 2 & 3\\1 & 0 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\\9\\10\\7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 700 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18000 \\ 7000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18000 \\ 7000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11000 \end{bmatrix}$$

c. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

d. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 & 8 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$