

Lineáris leképezés és annak mátrixa

Feladatsor megoldásokkal

Lineáris leképezés:

Bevezetés: - Mit értünk „lineáris leképezés” alatt? Hogyan dönthetjük el egy leképezésről, hogy az valóban homogén lineáris leképezés-e?

Definíció:

Legyenek V és W vektorterek, valamint $u, v \in V, k \in \mathbb{R}$. Azt az $L : V \rightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, lineáris leképezésnek nevezzük:

- a. $L(u + v) = L(u) + L(v)$
- b. $L(ku) = kL(u)$

Ha $V=W$, akkor a leképezést lineáris transzformációnak hívjuk.

Az $L(u)$ vektor az u vektor képe. (Az u vektor az $L(u)$ vektor őse)

Feladatok: Döntsük el, hogy az alábbiak homogén lineáris leképezések, vagy nem azok!

$$0.1.) L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = x + y + z$$

Megoldás:

Azt kell csak megvizsgálnunk, hogy érvényes-e rá a definícióban szereplő két tulajdonság:

$$\begin{aligned} L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) &= L\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = \dots \\ &\dots = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$L\left(k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix}\right) = kx + ky + kz = k(x + y + z) = kL\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$$

Mivel mindkét tulajdonság teljesül, L homogén lineáris leképezés.

0.2.)

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= L\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)^2 \\ (y_1 + y_2)^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2^2 \\ y_2^2 \end{bmatrix} = \dots \\ &\dots = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Mivel az egyik tulajdonság nem teljesül, L biztosan NEM homogén lineáris leképezés!

0.3.)

$$A: \mathbb{R}^2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2[x], \quad A(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 - bx + a + 3c$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} A((a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2)) &= A(a_1x^2 + a_2x^2 + b_1x + b_2x + c_1 + c_2) = \\ &= A((a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2) = 2(a_1 + a_2)x^2 - (b_1 + b_2)x + (a_1 + a_2) + 3(c_1 + c_2) = \\ &= 2a_1x^2 + 2a_2x^2 - b_1x - b_2x + a_1 + a_2 + 3c_1 + 3c_2 = 2a_1x^2 - b_1x + a_1 + 3c_1 + 2a_2x^2 - b_2x + a_2 + 3c_2 = \\ &= A(a_1x^2 + b_1x + c_1) + A(a_2x^2 + b_2x + c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(k(ax^2 + bx + c)) &= A(kax^2 + kbx + kc) = 2kax^2 - kbx + ka + 3kc = \\ &= k(2ax^2 - bx + a + 3c) = kA(ax^2 + bx + c) \end{aligned}$$

A valóban homogén lineáris leképezés (mivel mindkét tulajdonság teljesül).

0.4.)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y \\ \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{bmatrix}$$

($F: \alpha$ szöggel való forgatás)

Megoldás:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= F\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)\cos(\alpha) - (y_1 + y_2)\sin(\alpha) \\ (x_1 + x_2)\sin(\alpha) + (y_1 + y_2)\cos(\alpha) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1\cos(\alpha) + x_2\cos(\alpha) - y_1\sin(\alpha) - y_2\sin(\alpha) \\ x_1\sin(\alpha) + x_2\sin(\alpha) + y_1\cos(\alpha) + y_2\cos(\alpha) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1\cos(\alpha) - y_1\sin(\alpha) \\ x_1\sin(\alpha) + y_1\cos(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2\cos(\alpha) - y_2\sin(\alpha) \\ x_2\sin(\alpha) + y_2\cos(\alpha) \end{bmatrix} = F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + F\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$F\left(k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \cos(\alpha) - ky \sin(\alpha) \\ kx \sin(\alpha) + ky \cos(\alpha) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{bmatrix} = kF\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Az α szöggel való forgatás valóban Homogén Lineáris leképezés.

0.5.) *Döntsük el, lineáris leképezések-e az alábbi leképezések:*

a) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2, V_1 = V_2$, síkvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : tengelyes tükrözés.

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ teljesül, hiszen ha először összeadom a vektorokat, és az összegvektort tükrözöm, ugyanazt a vektort kapom, mintha először tükrözném egyenként a vektorokat, és utána adnám össze őket.

$\mathcal{A}(\lambda\underline{u})=\lambda(\mathcal{A}\underline{u})$ szintén teljesül, hiszen ha először megnyújtom a vektort, és utána tükrözöm, akkor ugyanazt a vektort kapom, mint ha tükrözés után nyújtanám meg a vektort. Tehát a leképezés lineáris.

b) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2, V_1 = V_2$, síkvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : 45°-os, pozitív irányú

forgatás az origó körül.

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ teljesül, hiszen ha először összeadom a vektorokat, és az összegvektort forgatom, ugyanazt a vektort kapom, mintha először elforgatnám egyenként a vektorokat, és utána adnám össze őket.

$\mathcal{A}(\lambda\underline{u})=\lambda(\mathcal{A}\underline{u})$ szintén teljesül, hiszen ha először megnyújtom a vektort, és utána elforgatom, akkor ugyanazt a vektort kapom, mint ha elforgatás után nyújtanám meg a vektort. Tehát a leképezés lineáris.

c) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2, V_1 = V_2$, az $[a,b]$ intervallumon differenciálható függvények

halmaza. \mathcal{A} : deriválás.

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ teljesül, hiszen $(f+g)'=f'+g'$.

$\mathcal{A}(\lambda\underline{u})=\lambda(\mathcal{A}\underline{u})$ szintén teljesül, hiszen $(\lambda f)'=\lambda f'$. Tehát a leképezés lineáris.

d) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, az $[a,b]$ intervallumon integrálható függvények halmaza. \mathcal{A} : integrálás.

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ teljesül, hiszen $\int (f+g) = \int f + \int g$

$\mathcal{A}(\lambda\underline{u})=\lambda(\mathcal{A}\underline{u})$ szintén teljesül, hiszen $\int \lambda f = \lambda \int f$. Tehát a leképezés lineáris.

e) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, a valós számok szokásos vektortere. $\mathcal{A}(x)=ax+b$. \mathcal{A} :

$V_1 \rightarrow V_2$,

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ nem teljesül, hiszen $a(x_1+x_2)+b \neq a(x_1)+b+a(x_2)+b$. Tehát a leképezés nem lineáris.

f) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, a valós számok szokásos vektortere. $\mathcal{A}(x)=x^2$.

Megoldás:

$\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v})=\mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v})$ nem teljesül, hiszen $(x_1+x_2)^2 \neq x_1^2+x_2^2$. Tehát a leképezés nem lineáris.

0.6.) Legyen \mathcal{A} lineáris leképezés V_1 -ről a V_2 -be, $\underline{c}_i \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ lineárisan független, akkor $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ is lineárisan független.

Megoldás:

Vegyük példának azt a leképezést amikor $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$ a térvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : síkra vetítés. Ekkor minden térvektor képe egy adott síkbeli vektor lesz (azon síkbeli, mely síkra a vetítés történik). Ekkor a térben természetesen találhatunk három lineárisan független vektort, ám ezek képe mind síkbeli vektor lesz. A síkban pedig bármely vektor kifejezhető két nem párhuzamos vektor lineáris kombinációjaként. Ez tehát azt jelenti, hogy 3 síkvektor már nem alkothat lineárisan független rendszert, így az állítás nem igaz, hiszen megadtunk egy ellenpéldát.

b) Ha $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ lineárisan független, akkor $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ is lineárisan független.

Megoldás:

Vektorok akkor alkotnak lineárisan független rendszert, ha lineáris kombinációjuk csak úgy állítja elő a nullvektort, hogy minden vektor együtthatója 0. Tehát $\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k = \underline{0}$ csak úgy teljesülhet, ha $\forall \lambda_i = 0$.

Ha $\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k = \underline{0}$, akkor $A(\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k) = A(\underline{0}) = \underline{0}$. Kihhasználjuk, hogy a leképezés lineáris, így az egyenlet a következő formába írható: $\lambda_1 \cdot A(\underline{c}_1) + \dots + \lambda_k A(\underline{c}_k) = \underline{0}$. De az $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ vektorokról tudjuk, hogy ezek lineárisan függetlenek, tehát a nullvektort csak úgy állíthatják elő ha $\forall \lambda_i = 0$. Így tehát igaz az is, hogy $\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k = \underline{0}$ csak úgy teljesülhet, ha $\forall \lambda_i = 0$. Így tehát $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ valóban lineárisan függetlenek, ha $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ vektorok lineárisan függetlenek.

c) Ha $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ generátorrendszer V_1 -ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ is generátorrendszer $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban.

Megoldás:

Ha $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ generátorrendszer V_1 -ben, akkor ez azt jelenti, hogy $\forall \underline{v} \in V_1$ -re létezik a $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_k$ vektorrendszernek egy olyan lineáris kombinációja, melyre $\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k = \underline{v}$. Ekkor ha vesszük mindkét oldalnak a képét, akkor $A(\lambda_1 \underline{c}_1 + \dots + \lambda_k \underline{c}_k) = A(\underline{v})$. Kihhasználjuk, hogy a leképezés lineáris, ezért az egyenletet ilyen alakba írhatjuk: $\lambda_1 A(\underline{c}_1) + \dots + \lambda_k A(\underline{c}_k) = A(\underline{v})$, ami pedig pont azt jelenti, hogy a képtér minden eleme előáll az $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát az $\mathcal{A}(\underline{c}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{c}_k)$ vektorok generátorrendszert alkotnak $\text{Im } \mathcal{A}$ -ban.

I. rész:***A leképezés mátrixa:***

$\forall A \in \text{Hom}(V_1^n, V_2^k)$ -hez $\exists \underline{\underline{A}} \in T^{k \times n}$, hogy $\underline{y} = A[\underline{x}] = \underline{\underline{A}}\underline{x}$

Amennyiben V_1^n, V_2^k bázisait rögzítjük, ez az $\underline{\underline{A}}$ egyértelmű.

Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy mely bázispárhoz tartozó mátrixról van szó, akkor így jelöljük: $\underline{\underline{A}}_{[[a][b]]}$, ahol:

$[a] = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ V_1^n bázisa

$[b] = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ V_2^k bázisa

Az $\underline{\underline{A}}$ mátrix a leképezés mátrixa.

Tétel: $\forall A \in \text{Hom}(V_1^n, V_2^k)$ leképezés mátrixa $\underline{\underline{A}}_{[[a][b]]} = [\underline{K}_1, \underline{K}_2, \dots, \underline{K}_n]$, ahol $\underline{K}_i := A(a_i)$. Az A leképezés mátrixa az $[a] \in V_1^n, [b] \in V_2^k$ bázispárra vonatkozóan az a $(k \times n)$ -es mátrix, amelynek oszlopvektorai a V_1 -beli („kiindulási tér”-beli) $[a]$ bázis vektorainak képei a képtér (V_2) $[b]$ bázisában kifejezve.

Leképezés mátrixával kapcsolatos feladatok: *Írja fel a leképezések mátrixát a megadott bázisokban (vagy ha nincs megadva bázis, akkor a kanonikus bázisokban)!*

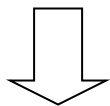
1.1.) $y=x$ egyenesre tükrözés

Megoldás:

(\underline{x} képe \underline{y} és vice versa)

$$\underline{i} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{[i,j,k]}$$

$$\underline{j} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{[i,j,k]}$$



$$\underline{A}_{[i,j,k]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ tényleg! } \mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

1.2.) Vetítés: $R^3 \rightarrow R^3$ (merőlegesen x, y síkra)

Megoldás:

$$\underline{i} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} \text{ képe } \underline{k} = 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_{[i,j,k]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.3.) Vetítés: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (merőlegesen x,y síkra)

Megoldás:

$$\begin{array}{l} \underline{i} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{j} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \underline{k} \text{ képe } \underline{0} = 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.4.) Vetítés az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisvektorok által kijelölt térből az \underline{i} és \underline{k} bázisvektorok által meghatározott síkra:

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az mátrix felírásához (a fenti tétel értelmében) a kiindulási tér (\mathbb{R}^3) bázisvektorainak képeit kell felírnunk a képtér (\mathbb{R}^2) bázisában.

A képtér bázisvektorai:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A kiindulási tér bázisvektorai:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A leképezés mátrixa tehát a tétel alapján:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5.) Most végezzük el az előző feladatot úgy, hogy az eredményt nem a kanonikus bázisban, hanem a következőben írjuk fel!

$$\text{A képtér bázisa: } \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

felírjuk a leképezés mátrixát a kanonikus bázisban (ezt tettük az előző feladatban), valamint felírjuk a kanonikus bázisból az új bázisra való áttérés mátrixát, és végül ezt a két mátrixot összeszorozzuk. Így kapjuk a feladatban szereplő (bázistranszformációval kiegészített) leképezés mátrixát.

A leképezés mátrixa a kanonikus bázisban:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{[i,j,k;i,k]}$$

Az $\underline{i}, \underline{k}$ (kanonikus) bázisról $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ bázisra való áttérés mátrixát úgy tudjuk könnyen felírni, ha felírjuk az ezzel éppen ellentétes irányú ($\underline{b}_1, \underline{b}_2 \rightarrow \underline{i}, \underline{k}$) bázistranszformáció (egy speciális leképezés) mátrixát, majd annak az inverzét vesszük.

Bázisvektorok: Transzformáltjaik (önmaguk a képek, csak másik bázisban):

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{[b]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ahol a bázist külön nem jelöljük, ott a koordináták}$$

$$\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{[b]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mindig a kanonikus bázisban értendők)}$$

$$\underline{B}_{[b_1, b_2; i, k]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{[b_1, b_2; i, k]} \quad (= \underline{B})$$

Invertálás:

$$\text{adj}(\underline{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{B}) = 1 - 0 = 1$$

$$\underline{B}^{-1}_{[b_1, b_2; i, k]} = \frac{\text{adj}(\underline{B})}{\det(\underline{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{[i, k; b_1, b_2]}$$

Így a keresett leképezés mátrixa:

$$\underline{A}_{[i, j, k; b_1, b_2]} = \underline{B}^{-1}_{[b_1, b_2; i, k]} \underline{A}_{[i, j, k; i, k]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6.) Legyen most $A: \mathbb{R}^2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2[x]$ a legfeljebb másodfokú polinomok teréből ugyanebbe a térbe képező homogén lineáris leképezés (hom. lin. transzformáció).

$$A(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 - bx + a + 3c$$

Írjuk fel a leképezés A mátrixát!

Megoldás:

A bázisunk most mindkét térben: $[x^2; x; 1]$

$$\underline{x^2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel ezek képét „A” leképezés ismeretében:

$$\underline{x^2} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Így tehát:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.7.)

$$L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L(x_1, x_2) := (2x_1 - 3x_2, x_1 + x_2)$$

Megoldás:

Első megoldás: oszloponként állítjuk elő a keresett mátrixot, felhasználjuk a fenti tételt, miszerint a leképezés mátrixának oszlopvektorai az [a] bázis vektorainak képei.

$$A = [L(1,0) \quad L(0,1)]$$

$$\begin{aligned} L(1,0) &= (2*1 - 3*0, 1*1 + 1*0) = (2,1) \\ L(0,1) &= (2*0 - 3*1, 1*0 + 1*1) = (-3,1) \end{aligned} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Második megoldás – egyenletrendszeres módszerrel:

$$A * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_1 * x_1 + a_2 * x_2 &= 2 * x_1 - 3 * x_2 \\ a_3 * x_1 + a_4 * x_2 &= 1 * x_1 + 1 * x_2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.8.)

$$L: P_3 \rightarrow P_2$$

$$L(P)(x) := P(x+1) - P(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

A bázis mindkét térben a hatványfüggvényekből álló bázis.

Megoldás:

(a 3.) példa 2. megoldásához hasonlóan)

A két tér bázisa tehát: $P_3: \{1, x, x^2, x^3\}$ és $P_2: \{1, x, x^2\}$

$$L(1) = (x+1)^0 - x^0 = 1 - 1 = 0 = 0*1 + 0*x + 0*x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(x) = (x+1)^1 - x^1 = (x+1) - x = 1 = 1*1 + 0*x + 0*x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 1 + 2x = 1*1 + 2*x + 0*x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 1 + 3x + 3x^2 = 1*1 + 3*x + 3*x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Egymás mellé írom az oszlopvektorokat, és így megkapom a mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.9.) Határozzuk meg a síkban (\mathbb{R}^2 -ben) lévő $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor $+30^\circ$ -kal elforgatott képét (\underline{v}' -t) a forgatás, mint hom. lin. leképezés segítségével! (\underline{v} -hoz hasonlóan \underline{v}' -t is a kanonikus bázisban adjuk meg!)

Megoldás:

(A kiindulási tér és a képtér bázisa tehát megegyezik: kanonikus bázis)
A kiindulási tér bázisvektorai; valamint azok 30° -kal elforgatott képei ugyanebben a bázisban felírva:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\sin(30^\circ) \\ \cos(30^\circ) \end{bmatrix}$$

Így a $+30^\circ$ -kal való elforgatás mátrixa (kanonikus bázisban):

$$\begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix}$$

Végül:

$$\underline{v}' = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

1.10.)

Mi lesz a $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor $+60^\circ$ -kal elforgatott képe (szintén a kanonikus bázisban)?

Megoldás:

$$\underline{v}' = \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1.11.) \mathbb{R}^3 vektorait az xz síkra vetítjük, majd 90° -kal elforgatjuk negatív irányba. Határozzuk meg az $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ „vetítés, majd forgatás” lineáris leképezés mátrixát!

Megoldás:

A vetítés mátrixát az 1.) feladathoz hasonló módon kaphatjuk meg, a tétel alapján.

A képtér bázisvektora ez alkalommal:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

-90° -os elforgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1x + 0y + 0z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1x + 0z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0x - 1z$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0x + 1y + 0z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0x + 0z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0x + 0z$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow 0x + 0y + 1z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0x + 1z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1x + 0z$$

A teljes $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ „vetítés, majd forgatás” lineáris leképezés mátrixa:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.12.) Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrix forgatási mátrix-e?

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás:

A $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix nem lehet forgatási mátrix, mivel a főátlójában álló két elem

különböző. $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b \in [-1; 1]$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

A $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nem lehet forgatási mátrix, mivel, bár $a=1$, $b=1$ választással megfelel az $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ alaknak, azonban nincs olyan α szög, amelyre igaz lenne, hogy, ha $\cos(\alpha) = 1$, akkor $\sin(\alpha) = 1$ lehetséges.

II. rész:

Lineáris leképezések összege, számszorosa és szorzata:

1. Definíció:

Az $A, B : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezések összegén azt az $A + B$ -vel jelölt leképezést értjük, amely minden $\underline{u} \in V_1$ vektorhoz az $A\underline{u} + B\underline{u} \in V_2$ vektort rendeli hozzá. Azaz

$$(A + B)\underline{u} = A\underline{u} + B\underline{u}$$

2. Definíció:

Az $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezésnek a $\lambda \in T$ skalárral való szorzatán azt a λA -val jelölt leképezést értjük, amely minden $\underline{u} \in V_1$ vektorhoz a $\lambda(A\underline{u}) \in V_2$ vektort rendeli hozzá. Azaz

$$(\lambda A)\underline{u} = \lambda(A\underline{u})$$

Feladat: *Bizonyítsuk, hogy valóban homogén lineáris leképezés! (előadáson is elhangzott)*

$$(\lambda A)(\underline{u} + \underline{v}) = \lambda(A(\underline{u} + \underline{v})) = \lambda(A\underline{u} + A\underline{v}) = \lambda(A\underline{u}) + \lambda(A\underline{v}) = (\lambda A)\underline{u} + (\lambda A)\underline{v}$$

$$(\lambda A)(\alpha \underline{u}) = \lambda(A(\alpha \underline{u})) = \lambda(\alpha(A\underline{u})) = \alpha(\lambda(A\underline{u})) = \alpha((\lambda A)\underline{u})$$

Mivel mindkét tulajdonság teljesül, beláttuk, hogy a lineáris leképezések számszorosa (vagy másként skalárszorosa) valóban homogén lineáris leképezés.

3. Definíció:

Legyenek V_1 , V_2 és V_3 ugyanazon T test feletti vektorterek, $A \in \text{Hom}(V_2, V_3)$, $B \in \text{Hom}(V_1, V_2)$. Ekkor az A és B lineáris leképezések szorzatán azt az AB -vel jelölt $V_1 \rightarrow V_3$ leképezést értjük, amely minden $\underline{u} \in V_1$ vektorhoz az $A(B\underline{u}) \in V_3$ vektort rendeli hozzá. Azaz

$$(AB)\underline{u} = A(B\underline{u})$$

Feladatok:

2.1.) *Oldjuk most meg az 1.6. példát a mátrix szorzás segítségével!*

Kiszámoljuk külön-külön a két leképezés mátrixát, és összeszorozzuk őket.

A vetítés mátrixa: $\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A forgatás mátrixa (-90°): $\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

A két kapott mátrixot összeszorozzuk. Olyan, mintha elvégeznénk először az első leképezést, a vetítést (A_1), majd a másodikat, a forgatást (A_2). Tehát összeszorozzuk a két mátrixot, és egyszerre végezzük el a leképezést.

$$\underline{A} = \underline{A}_1 * \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Helyesen számoltuk, az eredmény megegyezik.

2.2.) Forgassuk el a $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort előbb 30° , majd 60° -kal.

Megoldás:

A 3. definíció (leképezések szorzata) alapján:

$$\begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

(Az addíciós tételek felhasználásával:)

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ + 60^\circ) & -\sin(30^\circ + 60^\circ) \\ \sin(30^\circ + 60^\circ) & \cos(30^\circ + 60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.) Forgassuk el a $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort 30° -kal, majd forgassuk el az eredeti vektort 60° -kal és végül adjuk össze az eredményül kapott két vektort.

Megoldás:

Mivel most a két leképezést (jelen esetben forgatást) nem egymás után hajtjuk végre, hanem előbb külön-külön végrehajtjuk őket az eredeti \underline{v} vektoron, majd az így eredményül kapott képek (vektorok) összegét vesszük, ezért a feladat megoldásához a leképezések összegéről szóló (1.) definíciót használhatjuk fel:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) + \cos(60^\circ) & -\sin(30^\circ) - \sin(60^\circ) \\ \sin(30^\circ) + \sin(60^\circ) & \cos(30^\circ) + \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{3}+5}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(Jól látható, hogy egészen más eredményt kaptunk, mint ugyanezen leképezések szorzatával a 2.2. feladatban.)

2.4.)

a) Nyújtsuk meg a $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort a 2-szeresére, majd forgassuk el -90° -kal!

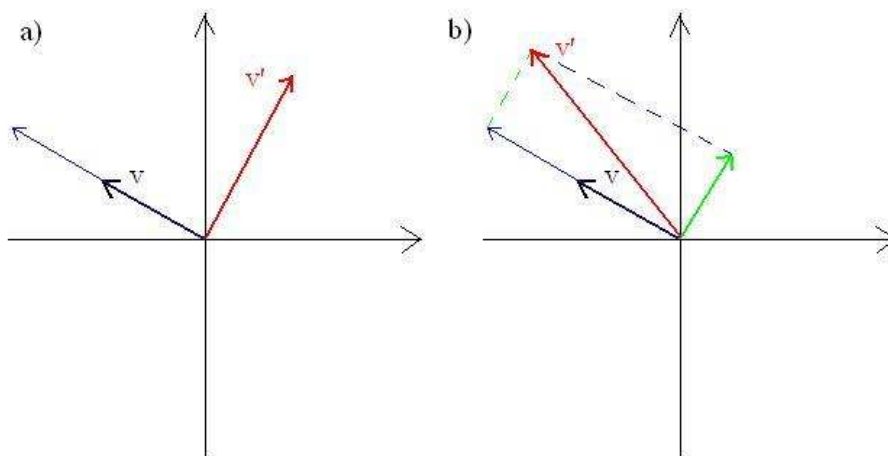
b) Nyújtsuk meg a $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort a 2-szeresére, illetve forgassuk el a v vektort -90° -kal, majd összegezzük a kapott képvektorokat!

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan (az 'a' feladatban a leképezések skalárszorosáról szóló (2.) definíciót is felhasználjuk.)

$$\text{a) } \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } & \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



2.5.) Forgassuk el a $\underline{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektort előbb 80° , majd 100° -kal.

Megoldás:

a) A 2.2. feladathoz hasonlóan:

$$\begin{bmatrix} \cos(100^\circ + 80^\circ) & -\sin(100^\circ + 80^\circ) \\ \sin(100^\circ + 80^\circ) & \cos(100^\circ + 80^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) Érdekes észrevenni, hogy a $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ -kal való forgatás nem más, mint egy tükrözés a két forgatás közös origójára:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

2.6.) \mathbb{R}^3 vektorait az yz síkra vetítjük, majd pozitív (óra járásával ellentétes) irányban 90° -kal elforgatjuk.

Megoldás:

oszloponként állítjuk elő a keresett mátrixot, felhasználjuk a fenti tételt, miszerint a leképezés mátrixának oszlopvektorai az $[a]$ bázis vektorainak képei.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1*x + 0*y + 0*z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*y + 0*z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*y + 0*z$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*x + 1*y + 0*z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1*y + 0*z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*y + 1*z$$

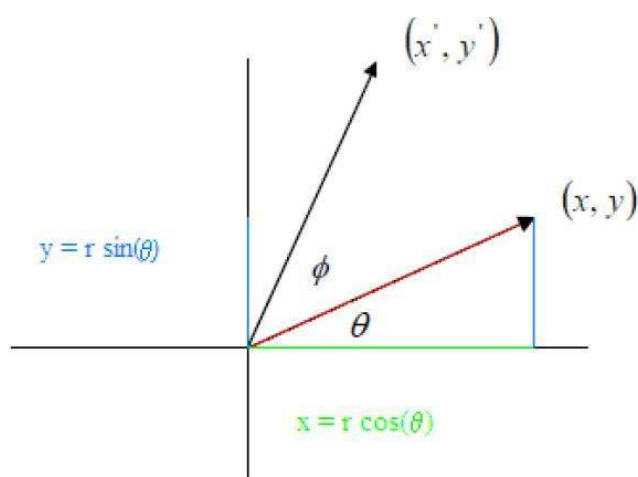
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0*x + 0*y + 1*z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0*y + 1*z \rightarrow \text{forgatjuk} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0*y + 1*z$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7.) A 2. példa megoldása másképp, két mátrix szorzataként: először kiszámoljuk a vetítés mátrixát, majd a 90° -os forgatását.

Megoldás:

Forgatás:



$$x' = r \cos(\theta + \phi) = r \cos(\theta) \cos(\phi) - r \sin(\theta) \sin(\phi) = x \cos(\phi) - y \sin(\phi)$$

$$y' = r \sin(\theta + \phi) = r \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) = x \sin(\phi) + y \cos(\phi)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 * x + 0 * y + 0 * z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 * y + 0 * z$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 * x + 1 * y + 0 * z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 * y + 0 * z$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 * x + 0 * y + 1 * z \rightarrow \text{vetítjük} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 * y + 1 * z$$

$$\text{a vetítés mátrixa: } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{A forgatás mátrixa: } A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) \\ \sin(90) & \cos(90) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A két kapott mátrixot összeszorozzuk. Olyan, mintha elvégeznénk először az első leképezést, a vetítést ($A_1 * x$), majd a másodikat, a forgatást ($A_2 * \text{az eredmény}$). Tehát összeszorozhatjuk a két mátrixot, s egyszerre végezhetjük el a leképezést.

$$A = A_2 * A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Helyesen számoltunk, ugyanazt kaptuk, mint az előző megoldásban (2.6.).

3.1.) Határozzuk meg a képtér és a magtér dimenzióját az alábbi leképezéseknél.

- a) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, a valós test feletti legfeljebb 100-adfokú polinomok (és a 0) szokásos vektortere. (A polinomokat $p(x)$ -szel jelöljük.) $\mathcal{A}: p(x) \rightarrow \alpha_0 p(x)$. ($\alpha_0 \neq 0$)

Megoldás:

Ha egy polinomot egy α_0 konstanssal szorzok, akkor a polinom fokszáma nem változik, csak az együtthatók változnak. Így a képtér szintén a legfeljebb 100-adfokú polinomok vektortere lesz, a magtér pedig az azonosan 0 polinom lesz. Így $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=101$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=0$.

- b) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, a valós test feletti legfeljebb 100-adfokú polinomok (és a 0) szokásos vektortere. (A polinomokat $p(x)$ -szel jelöljük.) $\mathcal{A}: p(x) \rightarrow p(x) - x p'(x)$.

Megoldás:

Ha egy polinomot deriválunk, akkor a polinom fokszáma eggyel csökken. Így az $x \cdot p'(x)$ polinom fokszáma megegyezik az eredeti polinom fokszámával. Ha a leképezésünk ilyen alakú: $p(x) \rightarrow p(x) - x p'(x)$, akkor a képtér szintén a legfeljebb századfokú polinomok vektortere lesz, azonban vegyük figyelembe, hogy ha $p(x)=ax$, akkor $p(x) - x p'(x)=0$. Így a képtérben egyrészt nem szerepelnek elsőfokú polinomok, másrészt a képtérben levő polinomok egyikében sem lesz elsőfokú tag. Továbbá a magteret az elsőfokú és az azonosan 0 polinomok alkotják. Ezért $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=100$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=1$.

- c) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, síkvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : tengelyes tükrözés.

Megoldás:

A tengelyes tükrözés során síkvektor képe síkvektor. Továbbá tengelyes tükrözés során csak a nullvektor képe lehet nullvektor. A magtér tehát a nullvektor. Így tehát $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=2$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=0$.

- d) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, V_1 a térvektorok szokásos tere, V_2 pedig a síkvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : adott síkra történő merőleges vetítés.

Megoldás:

Térvektorok adott síkra történő merőleges vetítésekor minden térvektor képe síkvektor lesz, továbbá minden olyan térvektor képe a nullvektor lesz, melyek merőlegesek az adott síkra. A magtér tehát az adott síkra merőleges vektorok halmaza és a nullvektor. Így $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=2$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=1$.

e) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, síkvektorok szokásos tere. \mathcal{A} : 45° -os, pozitív irányú forgatás az origó körül.

Megoldás:

Síkvektor képe elforgatás után síkvektor lesz, és az elforgatás során csak a nullvektor képeként állhat elő nullvektor. Így tehát $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=2$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=0$.

f) $\mathcal{A}: V_1 \rightarrow V_2$, $V_1 = V_2$, a valós test feletti legfeljebb 100-adfokú polinomok (és a 0) szokásos vektortere. (A polinomokat $p(x)$ -szel jelöljük.) $\mathcal{A}: p(x) \rightarrow p'(x)$.

Megoldás:

Deriválás során minden polinom fokszáma eggyel csökken. Így a képtér a max. 99-fokú polinomok vektortere lesz. Továbbá a konstans polinom deriváltja 0, így a magteret az azonosan 0 és a konstans polinomok adják. Tehát $\dim(\text{Im } \mathcal{A})=100$, $\dim(\text{Ker } \mathcal{A})=1$.

További hasznos feladatok (ebben a témakörben) az alábbi linken elérhető előadásdiákban találhatóak:

http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/lin_lekep.pdf

Források:

Bató Kinga anyaga:

http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/lin_lek_matrixa_Kinga.pdf

Csány Gergely anyaga:

<https://wiki.itk.ppke.hu/twiki/bin/view/PPKE/DMI?sortcol=table;table=up>
(/"LIN_LEKEPEZES_ES_MATRIXA_MO.doc")

Sonneveld Ilona anyaga:

http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/Lin_lek_Ilus.pdf