Inverz mátrix

Def.: Azt az A^{-1}-gyel jelölt mátrixot, amelyre AA^{-1}=(A^{-1}A)=E az A, nxn-es mátrix inverzének nevezzük.

Ha van inverz, akkor az egyértelmű, ez a szorzás asszociativitásának következménye.

Szinguláris egy mátrix, ha det(A)=0. Ekkor nem invertálható.

det(A)$\neq 0$, akkor a mátrix **reguláris**, létezik inverze.

Ha A nxn-es mátrix, és A reguláris, akkor Ax=b lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, és ez x=A^{-1}b.

A tétel megfordítása is igaz, ha az Ax=b lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása, akkor az A matrix reguláris.

A mátrix szorzásra vonatkozó inverzét (ekkor A négyzetes) inverz mátrixnak, összeadásra vonatkozó inverzét ellentett mátrixnak nevezzük.

Az A mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

Inverz mátrix tulajdonságai:

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A\,T)^{-1} = (A^{-1})^{T}$
- Ha C invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni: AC = BC ⇔ A = B valamint CA = CB ⇔ A = B

Inverz mátrix kiszámítása:

a) Adjungált segítségével:

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, és det(A)≠0, akkor $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*}$, ahol $a^{*}_{ik} := D_{ki}$, D_{ik}=a_{ik}-hoz tartozó előjeles aldeterminány.

pl.: 3X3-as típusú mátrixra:

$A^{*}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$, ahol A^{*} az A mátrix (klasszikus) adjungáltja, szokás adj(A)-val jelölni.

Egy 2X2-es mátrix adjungáltja:

A=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

adj(A)=$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

b) **Gauss-elimináció** segítségével: az invertálandó (A) mátrix mellé írjuk a megfelelő egységmátrixot (E): [AIE], ezután ezt elemi sorekvivalens átalakításokkal [EID] alakra hozzuk, ahol D az A inverze.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & a_{kk} & \dots & \dots & 1 & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & 1 & \dots & \dots & d_{kk} & \dots \\ 0 & \dots & 1 & d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{array}\right]$$

Feladatok és megoldásaik (részben a tavalyi anyagból)

1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] - 2(II) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] - I \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] / 2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right] sorcsere$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

2.

a) A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

det(A)=4-6=-2≠0 ⇒ invertálható

adj(A)= $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

b) B=$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

det(B)=12-12=0 ⇒ szinguláris, nem invertálható

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

det(C)=(3-2)-(2-3)=2 ≠0 ⇒ invertálható

D_{11}=1, D_{12}=-1, D_{13}=1

D_{21}=1, D_{22}=1, D_{23}=-1

D_{31}=-5, D_{32}=1, D_{33}=1

⇒ $adj(A)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -5\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

⇒ $A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & -5/2\\ -1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$

3.

x + y + z = 2

x + 2y + z =6

y + z = 1

$Ax=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 1\end{bmatrix}$=b ⇒ $x = A^{-1}b$

Kiszámoljuk A^{-1}-t:

det(A)=1

D_{11}=1, D_{12}=-1, D_{13}=1

D_{21}=0, D_{22}=1, D_{23}=-1

D_{31}=-1, D_{32}=0, D_{33}=1

⇒ $adj(A)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ = A^{-1} (det(A)=1)

$$x=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 6\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ -3\end{bmatrix}\Rightarrow x=1, y=4, z=-3$$

4.

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

Megoldás: $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

5.

$$\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

Megoldás: $\begin{bmatrix}0 & 0{,}5 & -0{,}5\\ 1 & 0{,}5 & 1{,}5\\ 1 & 0 & 1{,}5\end{bmatrix}$

6.

$$\begin{bmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ -3 & 12 & -12\end{bmatrix}$$

Az átalakítások során egy tilos sort fogunk kapni, amiből következik,l hogy nem invertálható.

7.

$$\begin{bmatrix}5 & 7\\ 10 & 1\end{bmatrix}$$

Megoldása:

$$\begin{bmatrix}-1/65 & 7/65\\ 2/13 & -1/13\end{bmatrix}$$

8.

$$\begin{bmatrix}2 & 5 & 5\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 16 & 11\end{bmatrix}$$

Megoldása:

$$\begin{bmatrix}0{,}5 & 12{,}5 & -2{,}5\\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & -3{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}$$