

# DM konzultáció

Rajna Zalán

## generátorrendszer, bázis, dimenzió (feladatsor)

### Egy kis elmélet (ismétlés):

- **Lineáris kombináció:**  $\underline{v} = \alpha_1 \cdot \underline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \underline{x}_n$ , ahol  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ,  
vagyis ismét egy vektort kapunk így a vektorok számszorosainak összegéből.
- **LÖF** (lineárisan összefüggő vektorok): ha  $\underline{0} = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{x}_n$  igaz, és  $\exists k$ , hogy  $\lambda_k \neq 0$ .  
Példa a fenti alapján:  $\underline{0} = \alpha_1 \cdot \underline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \underline{x}_n + \alpha' \cdot \underline{v}$ , ahol ha a fenti lineáris kombinációt tekintjük, akkor látszik, hogy  $\alpha' = -1$  esetén igaz, vagyis LÖFa definíció alapján. (Nyilván így volt kifejezhető.)
- **LFG** (lineárisan független vektorok):  $\underline{0} = \lambda_1 \cdot \underline{x}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{x}_n$  igaz ACSA ha  $\forall k$ -ra  $\lambda_k = 0$ , tehát egyik vektort sem tudjuk a többi lineáris kombinációjaként előállítani.
- **Generátorrendszer:**  $g_1, g_2, \dots, g_k$  generátorrendszert alkotnak  $V$  (pl.  $n$  dimenziós) vektortéren, ha  $\forall \underline{v} \in V$  előállítható  $\underline{v} = \alpha_1 \cdot g_1 + \alpha_2 \cdot g_2 + \dots + \alpha_k \cdot g_k$  lineáris kombinációként.  
Tehát látszik, hogy lehetnek LÖF vektorok, valamint az is, hogy „ $k$ ” nem lehet kisebb, mint „ $n$ ”.
- **Bázis:** LFG generátorrendszer  $\rightarrow$  egyértelmű; „ $k$ ” = „ $n$ ”; nem fejezhetőek ki egymásból és minden  $\underline{v} \in V$  előállítható a lineáris kombinációjával.
- **Dimenzió:** egy vektortér dimenziója a bázisának elemszáma.

Vagyis a következő összefüggéseket érdemes látni:

LÖF rendszer +  $\underline{v}$   $\rightarrow$  LÖF rendszer  
bázis +  $\underline{v}$   $\rightarrow$  LÖF rendszer (nyilván csak akkor, ha  $\underline{v} \neq \underline{0}$ )  
generátorrendszer +  $\underline{v}$   $\rightarrow$  LÖF rendszer (nyilván csak akkor biztosan, ha  $\underline{v} \neq \underline{0}$ )  
bázis -  $\underline{v}$   $\rightarrow$  LFG rendszer  
LFG rendszer -  $\underline{v}$   $\rightarrow$  LFG rendszer

Kanonikus bázis (jelölés  $\underline{v}_i$ ): ahol  $\underline{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , vagyis  $n$  dimenziós vektortér bázisában  $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Mindig

az  $i$ -dik elem 1-es, a többi 0-ás.  $i$ -dik elem. Például két dimenzióban:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### Feladatok, példák:

1.)  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{[1]}$ . Ezek a vektorok generátorrendszert alkotnak-e  $\mathbf{R}^2$ -ben?

Ha generátorrendszer, akkor például állítsuk elő a  $\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}_{[1]}$  vektort  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  és  $\underline{c}$  lineáris kombinációjaként.

2.)  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}_{[1]}$ . Ezek a vektorok generátorrendszert alkotnak-e  $\mathbf{R}^3$ -ban?

Ha generátorrendszer, akkor például állítsuk elő a  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{[1]}$  vektort  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  és  $\underline{d}$  lineáris kombinációjaként.

3.) Ezek a vektorok LFG rendszert alkotnak?

4.) Bázis-e  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  és  $\underline{c}$  vektor  $\mathbf{R}^3$ -ban?

5.) Generátorrendszer-e  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  és  $\underline{d}$   $\mathbf{R}^3$ -ban?

6.) A fenti  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  és  $\underline{d}$  vektorok bázist alkotnak  $\mathbf{R}^3$ -ban?

7.) Hány dimenziós az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{d}$  vektorok által generált altér?

8.) Generátorrendszer-e a következő  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  és  $\underline{d}$  vektor  $\mathbf{R}^4$ -ben?  $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}_{[1]}$

Milyen altérben alkot ez a négy vektor generátorrendszert?

9.) Mennyi az  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{d}$  vektorok által generált altér dimenziója?

10.) Hány dimenziós teret határoznak meg a következő vektorok?  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}_{[1]}$

11.) Maximum másodfokú polinomok terén adjunk meg bázist!

12.) A fenti példában  $(x-1)$  és  $(x+4)$  bázist alkot a másodfokú polinomok terén?

13.) Adjunk egyszerű példát [b] bázisra a  $2 \times 2$ -es mátrixok terére.

14.) Hány LFG a következő mátrix oszlopvektorai közül?  $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & -4 \\ -3 & -5 & -6 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 19 \\ 10 & 20 & -29 & -10 \end{bmatrix}$

15.) Hány dimenziós teret generálnak a következő mátrix oszlopvektorai?  $\begin{bmatrix} 41 & \pi & \sqrt{3} \\ 13 & \sqrt[3]{27} & e \end{bmatrix}$

16.)\* Bizonyítsuk be, hogy  $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{[1]}$ , valamint  $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{[1]}$ ,  $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{[1]}$  által meghatározott  $A$  illetve  $B$  síkok párhuzamosak!

Plusz feladatok, anyagok:

12. példa: <http://www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/okt/2009t/linearisalgebra.pdf>

3-4.: <http://www.stud.u-szeged.hu/Szabo.Tamas.10/linalg/recept.pdf>

1., 7.: [http://www.math.bme.hu/algebra/a2/2009/fe04\\_07a2.pdf](http://www.math.bme.hu/algebra/a2/2009/fe04_07a2.pdf)