

## LINEÁRIS ELSŐFOKÚ EGYENLETRENDSZEREK

Def: Egy **lineáris egyenletrendszer** (neveket megfelelően) lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak nevezünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon szerepelnek.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b_1 \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \text{együttható} \quad \text{ismeretlen} \quad \text{konstans} \end{array}$$

→ **lípos** egyenletrendszer  $\Rightarrow$  egyetlen megoldás

Def: A **Gauss elimináció** célja, hogy az adott egyenletrendszerből ekvivalens átalakításokkal egy lépcsős alakú egyenletrendszert hozzon létre.

Def: A **lépcsős alakban** az  $i$ . sor tartalmazza az  $x_i$  ismeretlent, de nem tartalmazza az  $x_1, \dots, x_{i-1}$  ismeretleneket.

Def: **Ekvivalens** az átalakítás, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása, mint az eredetinek.

- két egyenlet felcserélése
- adott egyenlet szorzása  $\lambda > 0$  számmal
- valamelyik szemszorosít hozzá adjuk egy másikhoz

ÁLTALÁNOS ALAK

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

EGYÜTTMÁTÓ  
MATRIX

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

KIBŐVÍTETT  
MATRIX

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Tétel: A tilos sorok megfelelő egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért ennek nincs megoldása

Def: GAUSS-JORDAN eliminációnak nevezzük azt a megoldási módszert, amikor a függőlegesen lefelé rendezett egyenletrendszer ismét elvégezzük a GAUSS eliminációt, így létrehozva a redukált lépcsős

alakot:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$$

→ ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint ahány sor a redukált lépcsős alakban létrejött, akkor végellen sok megoldás van

Def: Homogén lineáris egyenletrendszer akkor van, ha az összes konstans 0-val egyenlő.

Tétel: Ha a lépcsős alakban szereplő sorok száma nem kisebb, mint ahány ismeretlen van, akkor csak a TRIVIALIS megoldás létezik.  $(x_1=0, x_2=0 \dots x_n=0)$

## MÁTRIX ALGEBRA

Def: Számok táblázatos elrendezését mátrixnak nevezzük.

Legyen  $\mathbb{R}$  a valós számok halmaza,  $m, n \in \mathbb{N}$  természetes számok.

Ekkor az  $\mathbb{R}$  feletti  $m \times n$ -es mátrixon egy olyan táblázatot értünk, amelynek  $m$  sora és  $n$  oszlopa van, elemei pedig a valós számok.

A mátrix típusa:  $m \times n$

Def: Két mátrix akkor **egyenlő**, ha megfelelő pozíciókon álló elemeik egyenlők:  $(a_{ik}) = (b_{ik}) \Leftrightarrow a_{ik} = b_{ik}$

Def: **Speciális mátrixok:**

- **NÉGYZETES MÁTRIX**:  $n \times n$  típusú mátrix

- **SORVEKTOR**:  $1 \times n$  típusú mátrix

- **OSZLOPVEKTOR**:  $n \times 1$  típusú mátrix

- **SZIMMETRIKUS**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 2.1 \\ 0 & 0 & 2.1 & 5 \end{bmatrix}$$

- **NULLMÁTRIX**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **DIAGONÁLIS**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- **EGYSÉG-MÁTRIX**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Def: Tekintsük matematikai objektumok egy halmazát. A **művelet** olyan függvény, amely az adott halmaz elemeihez egy másik halmazbeli elemet rendel. **Eggyárváltozás** (unáris) a művelet, ha egy elemhez rendel egy másik elemet. **Kétváltoztató** (bináris) a művelet, ha két elemhez rendel egy másik elemet.

Def: Az  $A = (a_{ik})$  és a  $B = (b_{ik})$  mátrixok **összege** azt a  $C = (c_{ik})$  mátrixot értjük, amelynek adott pozícióji elemét az  $A$  és  $B$  mátrixok ugyanazon pozícióji elemeinek összeadásával kapjuk:  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

**MÁTRIXOK ÖSSZADÁSÁNAK TULAJDONSÁGAI: (ABEL-CSOPORT)**

1, **KOMMUTATÍV**

$$A + B = B + A$$

2, **ASSOCIATÍV**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3, **VAN EGYSÉGELEM**

$$A + O = A$$

4, **VAN INVERZ ELEM**

$$A + A' = O$$

Def: Az  $A$  mátrix  $m \times n$  típusú, a  $B$  mátrix  $n \times k$  típusú. Az  $A$  és  $B$  mátrixok szorzata az a  $C$  mátrix, melynek típusa  $m \times k$ , és elemeit a következőképpen számoljuk ki:  $C_{ik} := \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lk}$

Tétele: A mátrixok szorzása művelet, ha az összes mátrix halmazát, vagy a négyzetes mátrixok halmazát tekintjük.

$$\begin{array}{c} \text{szorzando} \\ \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \text{szorzó} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 32 \\ 17 & 18 & 77 \end{bmatrix}$$

→ a mátrixok szorzásakor a tényezők felcserélése még akkor sem lehetséges, ha a típusuk ezt lehetővé tenné

MÁTRIXOK SZORZÁSÁNAK TULAJDONSÁGAI:

- NEM FELCSERÉLHETŐ  $A \cdot B \neq B \cdot A$
- ASSOCIATÍV  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- azonos típusú mátrixokra nézve a SZORZÁS DISZTRIBUTÍV AZ ÖSSZEADÁSRA
  - a)  $A(B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
  - b)  $(B+C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$

Tétele: Bármely mátrixot a nullmátrixszal szorozva nullmátrixot kapunk. (EZ VISSZAFELE NEM IGAZ)

Def: Legyen adott matematikai objektumok egy halmaza,  $H$ , és  $*$  jelentsen a  $H$  halmazon értelmezett, kétváltozós műveletet. Azt mondjuk, hogy az  $e \in H$  objektum a  $*$  műveletre nézve egységelem, ha  $\forall a \in H$ -ra  $h * e = e * h = h$

Tétele: Az egységmátrixnak az a fontos tulajdonsága is megvan, hogy a vele való szorzás nem változtatja meg az  $A$  szorzandó mátrix elemeit, akár jobbról, akár balról szorzuk.

Def: Az  $n \times n$ -es mátrixok körében az  $n \times n$ -es  $E_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  egységmátrix a szorzás egysége, neve: **egységmátrix**

Tétele: Legyen  $A$  egy  $n \times n$  típusú mátrix. Ekkor  $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$

Biz:

$$\begin{aligned} \text{Legyen } A E_n &= C & c_{ik} &= \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot e_{lk} = a_{ik} \cdot e_{kk} = a_{ik} \\ & \text{mivel } e_{lk} &= 0, & \text{ha } l \neq k, \text{ és } 1, \text{ ha } l = k \\ \text{Legyen } E_n A &= D & d_{ik} &= \sum_{l=1}^n e_{il} \cdot a_{lk} = e_{ii} \cdot a_{ik} = a_{ik} \\ & \text{mivel } e_{il} &= 0, & \text{ha } i \neq l, \text{ és } 1, \text{ ha } i = l \end{aligned}$$

Def: Legyen adott matematikai objektumok egy halmaza,  $H$ , és  $*$  jelentsen egy ezen a  $H$  halmazon értelmezett, kétváltozós művelet. Azt mondjuk, hogy a  $h^{-1} \in H$  a  $*$  műveletre nézve és az  $e$  egységelemre nézve a  $h$  **inverz eleme**, ha  $\forall h \in H$ -ra  $h * h^{-1} = h^{-1} * h = e$ .

Def: Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Azt az  $A^{-1}$ -gyel jelölt,  $n \times n$ -es mátrixot, amelyre  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ , az  $A$  mátrix **inverzének** nevezzük.

szorzás = inverz mátrix      összeadás = ellenkezi mátrix

Tétel: Ha az  $A$  mátrixnak van baloldali és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű.

Biz: Összeadón a valós számok tulajdonságaiból következik,

szorzóna bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= E_n & A \cdot A^* &= E_n \\ A^{-1} &= A^{-1} \cdot E_n = A^{-1} (A \cdot A^*) = (A^{-1} \cdot A) \cdot A^* = E_n \cdot A^* = A^* \end{aligned}$$

## Matrix inverzeinek számítása GAUSS - JORDAN eliminációval:

$$[A | E_n] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{array} \right] = [E_n | D]$$

→ ha az inverz mátrix nem létezik, a mátrix **SZINGULÁRIS**

Tétel: Ha van inverz, akkor az egyértelmű

### INVERZ MATRIX TULAJDONSÁGAI:

- A mátrix inverzeinek inverze önmaga  $(A^{-1})^{-1} = A$
- Ha az A és B mátrixok invertálhatóak, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzeinek fordított sorrendben való szorzata  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- Ha a C mátrix invertálható, akkor a mátrixegyenletet lehet a szokásos módon megoldani:  $AC = BC \rightarrow A = B$

$$CA = CB \rightarrow A = B$$

Biz 1:  $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot E = (A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) = ((A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1})A = E \cdot A = A$

Biz 2:  $(A \cdot B)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = AA^{-1} = E$

Biz 3:  $A = A \cdot E = A \cdot (C \cdot C^{-1}) = (AC)C^{-1} = (BC)C^{-1} = B(C \cdot C^{-1}) = B \cdot E = B$

Def: Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ekkor A transzponáltján azt a  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot értjük, amelynek elemeik  $b_{ij} = a_{ji}$ . Az A transzponáltja:  $A^T$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Def: Az  $A$  mátrix **SZIMETRIKUS**, ha  $A=A^T$

Tétel: Összeg transzponáltja a transzponáltak összege:  $(A+B)^T = A^T + B^T$

Szorzat transzponáltja a tényező transzponáltjainak felcserélt

szorzata:  $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

Transzponált inverze egyenlő az inverz transzponáltjával:  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Def: Legyen  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Az  $m \times n$ -es  $A$  mátrix  $\lambda$  számszorosa a  $B$  mátrix, melynek elemei igaz:  $b_{ik} = \lambda a_{ik}$ . Mátrix számszorosa **FÜGGVÉNY**

**MÁTRIX SZÁMSZOROSÁNAK TULAJDONSÁGAI:**

Legyen  $A$  egy  $m \times n$ -es mátrix,  $\lambda$  és  $\mu$  valós számok:

-  $1A = A1 = A \iff 1a_{ik} = a_{ik} \cdot 1 = a_{ik}$

- **VEGYES ASSZOCIATIVITAS:**  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) \cdot A \iff \lambda(\mu a_{ik}) = (\lambda\mu)a_{ik}$

- **VEGYES DISZTRIBUTIVITAS:**  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \iff (\lambda + \mu)a_{ik} = \lambda a_{ik} + \mu a_{ik}$

- **VEGYES DISZTRIBUTIVITAS:**  $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \iff \lambda(a_{ik} + b_{ik}) = \lambda a_{ik} + \lambda b_{ik}$

**SPECIÁLIS MÁTRIXOK:**

Def: Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek mindegyik sorában és oszlopában pontosan egy db egyes áll, **permutációs mátrixnak** nevezzük.

Def: Az  $A = (a_{ik})$  mátrix **antiszimmetrikus**, ha  $A = -A^T$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad (-b)^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}^T = B$$

Def: A  $G$  mátrix **ortogonális**, ha  $G \cdot G^T = E$ , ahol  $E$  a megfelelő típusú egységmátrix. Az ortogonális szóval megnevezett fogalom a merőlegesség általánosítása.

Tétel: Minden  $A \in T^{n \times n}$  mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

Biz: A mátrix összeadás tulajdonságai miatt ez felírható:  $A = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$   
 Azt kell bizonyítani, hogy az  $S = \frac{1}{2}(A+A^T)$  mátrix szimmetrikus, az  $F = \frac{1}{2}(A-A^T)$  mátrix pedig antiszimmetrikus. A definíció alapján:

$$s_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) = \frac{1}{2}(a_{ki} + a_{ik}) = s_{ki}, \text{ így } S \text{ valóban szimmetrikus}$$

$$f_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}) = -\frac{1}{2}(a_{ki} - a_{ik}) = -f_{ki}, \text{ így } F \text{ valóban antiszimmetrikus.}$$

Tétel: A  $G$  mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha  $G^T = G^{-1}$ .

## VEKTORALGEBRA

Def: Az irányított szakaszt vektorok nevezzük.

Def: Szabad vektorokról beszélünk, ha kezdőpontja nem lényeges.

Kötött vektorokról, ha a kezdőpont (támadópont) helyek fontosak.

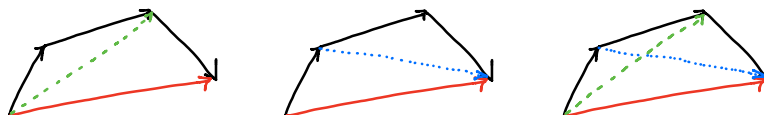
Def: Két vektor egyenlő, ha a hosszuk és irányuk megegyezik.

Def: Az  $a$  és a  $b$  vektorok összegét úgy kapjuk, hogy a  $b$  vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan az  $a$  vektor végpontjába. Ekkor az  $a$  kezdőpontjából a  $b$  végpontjába mutató vektor az összegük.

Tétel: Vektorok összeadása kommutatív:  $a + b = b + a$



Tétel: Vektorok összeadása asszociatív:  $(a+b)+c = a+(b+c)$



Def: A **nullvektor** kezdőpontja és végpontja ugyanaz a pont, inkább pedig definíció szerint tetszőleges. Jelölése:  $\underline{0}$

Tétel: A vektorokon értelmezett összeadás műveletnek **létezik egységelem**:

$$\underline{a} + \underline{e} = \underline{a}. \text{ Ez az egységelem a nullvektor: } \underline{0}$$

Biz: Az összeadás definíciójából következik.

Tétel: Minden  $\underline{a}$  vektorhoz van olyan  $\underline{a}^{-1}$  vektor, hogy  $\underline{a} + \underline{a}^{-1} = \underline{0}$ .

Ezt az  $\underline{a}$  vektor ellentett vektorának hívjuk és  $(-\underline{a})$ -val jelöljük.

Biz: Az összeadás definíciójából következik.

VEKTOROK ÖSSZEADÁSÁNAK TULAJDONSÁGAI:

- KOMMUTATÍV :  $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

- ASSZOCIATÍV :  $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

- LÉTEZIK EGYSÉGELEM :  $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$

- LÉTEZIK INVERZ (ELLENTETT) :  $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

Def: Legyen  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\underline{a}$  vektor. Az  $\underline{a}$  vektor számszorosa az a  $\lambda \cdot \underline{a}$ -val jelölt vektor, amelyre :

$$\lambda \cdot \underline{a} = \begin{cases} \text{ha } \lambda > 0, \underline{a} \text{-val egy irányú, hossza: } |\lambda \underline{a}| = \lambda |\underline{a}| \\ < 0, \underline{a} \text{-val ellentétes irányú, hossza: } |\lambda \underline{a}| = |\lambda| \cdot |\underline{a}| \end{cases}$$

Lemma: Az  $\underline{a}$  vektor ellentettje:  $(-\underline{a}) = (-1) \underline{a}$

Lemma: Az  $\underline{a}$  és a  $\underline{b}$  vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha van olyan  $\lambda$  valós szám, amellyel egyik vektor felírható a másik  $\lambda$ -számszorosaként:  $\underline{a} \parallel \underline{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{a} = \lambda \underline{b}$

Biz: 1,  $\underline{a} \parallel \underline{b} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{a} = \lambda \underline{b}$

$$\underline{a} = |\underline{a}| \underline{e} \quad \underline{b} = |\underline{b}| \underline{e} \rightarrow \underline{e} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} \Rightarrow \underline{a} = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|} \cdot \underline{e} \Rightarrow \lambda = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$$

2, Ha  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , hogy  $\underline{a} = \lambda \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

Ez a definíció miatt igaz.

Def: Amennyiben  $|\underline{e}| = 1$ , akkor az  $\underline{e}$  vektort egységvektornak nevezzük.

VEKTOR SZÁMSZOROSÁG TULAJDONSÁGAI:

-  $1 \underline{a} = \underline{a}$

- vegyes asszociatív szabály:  $\mu(\lambda \underline{a}) = (\mu\lambda) \cdot \underline{a}$

- vegyes distributív szabályok:

$$(\lambda + \mu) \underline{a} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{a} \quad \lambda (\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$$

Def: Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok skalárszorzatán azt az  $\underline{a} \cdot \underline{b}$ -vel jelölt számot értjük, amelyre  $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$ , ahol  $\alpha$  a vektorok által bezárt szög jelent.

Tétel: A skalárszorzat geometriai jelentése:

Ha az egyik vektor egységvektor,

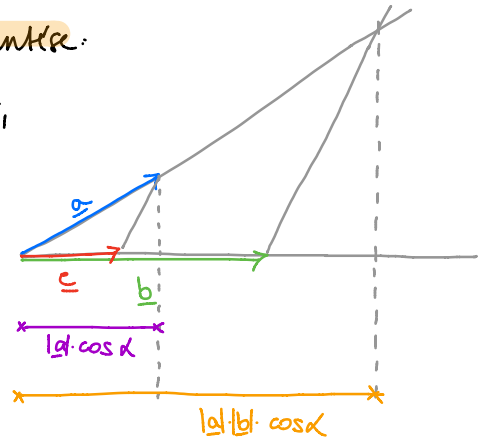
akkor az  $|\underline{a}| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos \alpha =$

$|\underline{a}| \cdot \cos \alpha = x$ , ahol  $x$

az  $\underline{a}$  vektor  $\underline{e}$ -re vett

előjeles merőleges vetületének

előjeles hossza.



SKALÁRSZORZAT TULAJDONSÁGAI:

- POZITÍV DEFINIT :  $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$ ,  $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \iff \underline{a} = \underline{0}$

- SZIMMETRIKUS :  $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

- HOMOGÉN :  $\lambda (\underline{a} \cdot \underline{b}) = (\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b}$

- LINEÁRIS :  $\underline{a} (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$

Tétel:  $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \iff \underline{a} \perp \underline{b}$

Biz: 1,  $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \rightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$

Ha  $|\underline{a}| \neq 0$  és  $|\underline{b}| \neq 0$ , akkor  $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha = 0$

csak úgy lehet, ha  $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

2,  $\underline{a} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

Mivel  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , ezért ez alapvetően következik

$$|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot 0 = 0$$

Def: Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok jobbrendszert alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket a  $\underline{c}$  vektor irányából nézve az  $\underline{a}$  vektort  $\pi$ -nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járáásával ellentétes) irányú forgatás révén át a  $\underline{b}$  vektor irányába.

Def: Az  $\underline{a}, \underline{b}$  vektorok vektoriális szorzatán azt az  $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelyre: 1,  $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\alpha)$

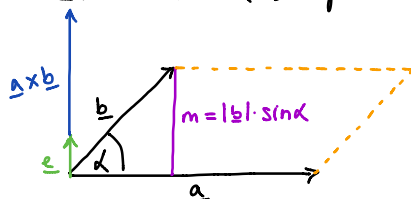
2, Az  $\underline{a} \times \underline{b}$  vektor iránya mindig  $\underline{a}$ -ra, mindig  $\underline{b}$ -re merőleges és velük jobbrendszert alkot.

Def: Az  $\underline{a}, \underline{b}$  vektorok vektoriális szorzatán azt az  $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelyre:  $\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\alpha) \cdot \underline{e}$ , ahol  $|\underline{e}| = 1$ ,  $\underline{a} \perp \underline{e}$ ,  $\underline{b} \perp \underline{e}$  és  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}$  jobbszort alkotnak.

Tétel: A vektoriális szorzat geometriai jelentése:

Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  által kifeszített paralelogramma területe.

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha = (\text{alop} \cdot \text{magasság})$$



Tétel: Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektoriális szorzata akkor csak akkor  $\underline{0}$ , ha a vektorok párhuzamosak:  $\underline{a} \times \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

1,  $\underline{a} \parallel \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

Két vektor párhuzamos, ha  $\alpha = 0^\circ$  vagy  $\alpha = 180^\circ$ .

Ekkor  $\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

2,  $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

Ha  $|\underline{a}| \neq 0$  és  $|\underline{b}| \neq 0$ , akkor  $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha$  csak

akkor  $\underline{0}$ , ha  $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$  vagy  $\alpha = 180^\circ \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

VEKTORIÁLIS SZORZAT TULAJDONSÁGOK:

— ANTIKOMMUTATÍV :  $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

— NEM ASSZOCIATÍV :  $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$

— DISZTRIBUTÍV :  $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{c}) + (\underline{b} \times \underline{c})$

$\underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$

Def: Az  $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$  valós számot az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok vegyes szorzatának nevezzük. Az eddigi definíciókat felhasználva:

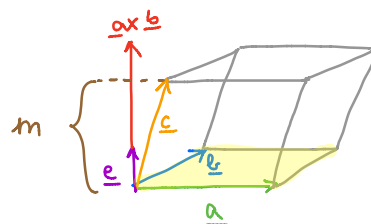
$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha \cdot |\underline{c}| \cdot \cos \beta$

$\alpha = (\underline{a}, \underline{b}) \quad \beta = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$

Tétel: Vektoriális szorzat geometriai jelentése:

Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok által befoglalt paralelepipedon előjelű térfogata:

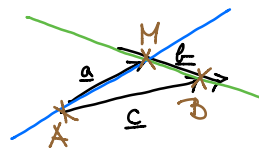
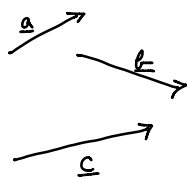
$$\begin{aligned} (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} &= (|\underline{a} \times \underline{b}| \cdot \underline{e}) \cdot \underline{c} = \\ &= (|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot \underline{e} \cdot \underline{c} = V_{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}} \\ &\text{alapterület} \cdot \text{magasság} \end{aligned}$$



## Vektorok felbontása, koordináták, mátrixos alak:

Tétel: Síkbeli felbontás - Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor,  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$ , akkor minden más  $\underline{c}$  síkbeli vektor felírható az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorokkal párhuzamos összetevőkre, melyek összege adja a  $\underline{c}$  vektort:  $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
Ez a felbontás egyértelmű

Biz:



$$\left. \begin{array}{l} AM \parallel \underline{a} \rightarrow AM = \alpha \cdot \underline{a} \\ BM \parallel \underline{b} \rightarrow BM = \beta \cdot \underline{b} \end{array} \right\} \underline{c} = AM + BM = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b}$$

Biz:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{c} = \alpha_1 \underline{a} + \beta_1 \underline{b} \\ \underline{c} = \alpha_2 \underline{a} + \beta_2 \underline{b} \end{array} \right\} 0 = (\alpha_1 - \alpha_2) \underline{a} + (\beta_1 - \beta_2) \underline{b}$$

csak akkor, ha  $\underline{a} \parallel \underline{b}$  és  $\underline{a} = (-1) \underline{b}$

Def: Legyenek  $\alpha, \beta, \gamma$  valós számok:

- az  $\underline{a}$  lineáris kombinációja az  $\alpha \underline{a}$  kifejezés,
- az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  lineáris kombinációja az  $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$  kifejezés,
- az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  lineáris kombinációja az  $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$  kifejezés.

Def: Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok lineárisan függetlenek, ha egyikük sem írható fel a másik két lineáris kombinációjaként.

Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok lineárisan összefüggők, ha...

Tétel: Az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha nem lineárisan összefüggők.

Télem: A síkban két vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem párhuzamosak.

Def: **BAZIS**nak nevezzük azokat a vektorokat, melyek függetlenek és lineáris kombinációjukból előállítható az összes többi vektor.

Télem: A síkban két lineárisan független vektor bázist alkot.

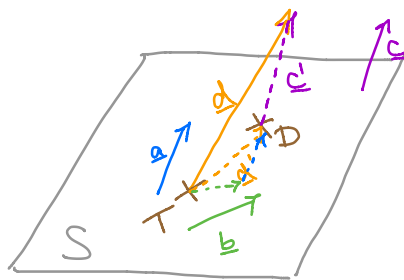
Def: Legyen a sík egy bázisa  $b = (b_1, b_2)$ . Ha  $\underline{c} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ , akkor az  $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_{[b]}$  a  $\underline{c}$  vektor **koordináta mátrixa**.

Télem: A térben három vektor akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem egy síkra esnek.

Biz: A lineáris függőség téleléből következik.

Télem: Térléli felbontási tétel – Ha adott a térben három nem egy síkra  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektor, akkor bármely  $\underline{d}$  térléli vektorhoz van olyan  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , amelyekre igaz, hogy  $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$ . Ez a felbontás egyértelmű.

$$\begin{aligned} \underline{d}' &= \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} \\ \underline{d} &= \underline{d}' + \underline{c}' = (\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) + \gamma \cdot \underline{c} \\ \Rightarrow \underline{d} &= \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c} \end{aligned}$$



Télem: A térben bármely 3 lineárisan független vektor bázist alkot.

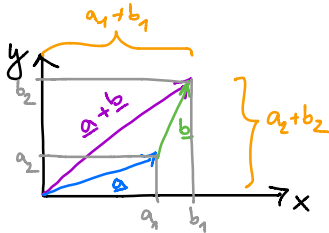
Def: Alkossanak az  $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$  vektorok a térben bázist. Ekkor a  $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$  lineáris kombinációban az  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  számok a  $\underline{d}$  vektor e bázisra vonatkozó koordinátái.

## SPECIÁLIS BÁZISOK

- ORTOGONÁLIS : vektorai merőlegesek
- NORMÁLT : vektorai egységvektorok
- ORTONORMÁLT : ha ortogonális és normált.

Def: Az ortogonális, jobbrandszori bázisra vonatkoztatott koordináták a vektor **DESCARTES**-koordinátái.

Tétel: Vektorok összege:



Adott  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  bázisa:

$$\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = [c_1, c_2, c_3]^T_{[\underline{a}]}$$

$$\underline{d} = d_1 \underline{a}_1 + d_2 \underline{a}_2 + d_3 \underline{a}_3 = [d_1, d_2, d_3]^T_{[\underline{a}]}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix}$$

Tétel: A vektor szorzása:

Adott  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  bázisánál:  $\underline{c} = c_1 \underline{a}_1 + c_2 \underline{a}_2 + c_3 \underline{a}_3 = [c_1, c_2, c_3]^T_{[\underline{a}]}$

A  $\underline{c}$  vektor  $\lambda$  szorzása  $\lambda \underline{c} = [\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3]^T$

Tétel: Ortogonalitási bázisban a skalárszorzat:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

Biz:  $\underline{i} \cdot \underline{i} = \underline{j} \cdot \underline{j} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$   $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}) \cdot (b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}) =$$

$$= a_1 \underline{i} \cdot b_1 \underline{i} + \cancel{a_1 \underline{i} \cdot b_2 \underline{j}} + \cancel{a_1 \underline{i} \cdot b_3 \underline{k}}$$

$$+ a_2 \underline{j} \cdot b_2 \underline{j} + \cancel{a_2 \underline{j} \cdot b_1 \underline{i}} + \cancel{a_2 \underline{j} \cdot b_3 \underline{k}}$$

$$+ a_3 \underline{k} \cdot b_3 \underline{k} + \cancel{a_3 \underline{k} \cdot b_1 \underline{i}} + \cancel{a_3 \underline{k} \cdot b_2 \underline{j}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tékl: Orthonormált, jobbrendszert bázisban vektoriális szorzat:

$$\left| \begin{array}{ccc} +\underline{i} & -\underline{j} & +\underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right| \quad \underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - b_2 a_3) \underline{i} \\ - (a_1 b_3 - b_1 a_3) \underline{j} \\ + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \underline{k}$$

Biz: Disztributív és antikommutatív tulajdonságok alapján,

$$\underline{i} \times \underline{i} = 0 \quad \underline{j} \times \underline{j} = 0 \quad \underline{k} \times \underline{k} = 0 \\ \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i} \quad \underline{i} \times \underline{j} = \underline{k} \quad \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \cancel{a_1 \underline{i} b_1 \underline{i}} + \cancel{a_1 \underline{i} b_2 \underline{j}} + \cancel{a_1 \underline{i} b_3 \underline{k}} \\ + \cancel{a_2 \underline{j} b_1 \underline{i}} + \cancel{a_2 \underline{j} b_2 \underline{j}} + \cancel{a_2 \underline{j} b_3 \underline{k}} \\ + \cancel{a_3 \underline{k} b_1 \underline{i}} + \cancel{a_3 \underline{k} b_2 \underline{j}} + \cancel{a_3 \underline{k} b_3 \underline{k}} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i} \\ - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \underline{j} \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{k}$$

Def: Az  $n$  sorba és  $n$  oszlopba rendezett valós számokból álló táblázatot

$\left| \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right|$  jelük közé téve determinánshoz nevezzük. A  $\left| \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right|$  jel azt jelenti, hogy a táblázathoz egy számot vagy egy vektort rendelünk, melynek kiszámítását különböző, azaz a determináns számítására alkalmazott szabály szerint számítjuk.

Főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát.

Tékl: Vektorok vegyes szorzata orthonormál bázisban:

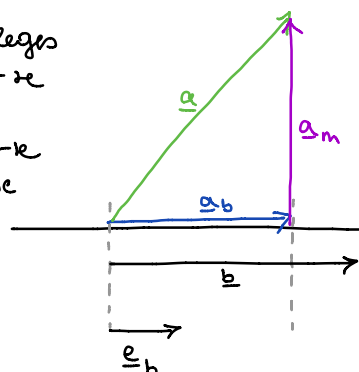
$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Tétel: Adottak az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok. Az  $\underline{a}$  vektor felírható a  $\underline{b}$ -vel párhuzamos  $\underline{a}_b$  és a  $\underline{b}$  vektora merőleges  $\underline{a}_m$  vektorok összegeként:

$$\underline{a} = \underline{a}_b + \underline{a}_m = (\underline{a} \cdot \underline{e}_b) \underline{e}_b \quad \text{és} \quad \underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_b$$

Biz:  $\underline{a} \cdot \underline{e}_b = |\underline{a}| \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha$  az  $\underline{a}$  merőleges vetülete  $\underline{b}$ -re

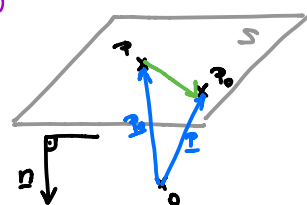
$\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_b$  = az  $\underline{a}$  vektor  $\underline{b}$ -re merőleges komponense



Def: Ha az  $\underline{n}$  merőleges az  $S$  síkra, akkor  $\underline{n}$  a normálvektora a síknak.

Tétel: Ha az  $S$  sík egy normálvektora  $\underline{n}$ , egy adott pontja  $P_0$ , ebbe mutató helyvektor  $\underline{p}_0$ , tetszőleges pontja  $P$ , ebbe mutató helyvektor  $\underline{p}$ , akkor az egyenes egyenlete:  $\underline{n}(\underline{p} - \underline{p}_0) = 0$

Biz:  $\underline{n}$  és  $\underline{PP}_0 \perp$ , ezért skalárszorzatuk  $= 0$



## ALGEBRAI STRUKTÚRÁK RELÁCIÓK

Def: Tekintsük matematikai objektumok egy  $H$  halmazát. A művelet olyan függvény, amely az adott objektumok halmazából vett objektumokhoz egy másik halmazbeli objektumot rendel.