

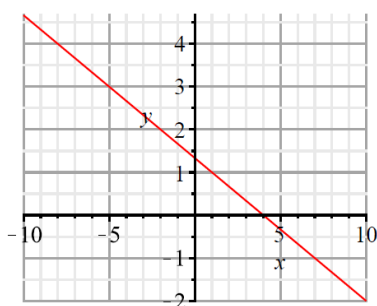
4. Hét

Egyenletrendszerek, Gauss elimináció

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek:

Ha egy két ismeretlenes egyenlet megoldásait ábrázoljuk egy koordináta rendszerben akkor egy egyenest fogunk kapni. Vagy fordítva, ha egy olyan pontot helyettesítünk vissza az egyenes egyenletébe, amely rajta van az egyenesen, akkor azonosságot kapunk az egyenletben.

Pl. $2x+6y=8$ átrendezve: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$



Ha 2 egyenletünk van, akkor, az két egyenest fog jelenteni a koordináta rendszerben. Ennek a két egyenesnek az egymáshoz való viszonya fogja szemléltetni számunkra a megoldásokat.

Lássuk milyen helyzetben lehetnek egymáshoz képest:

1., Egy közös pontjuk van, tehát metszik egymást, azaz egy megoldása van az egyenletrendszernek

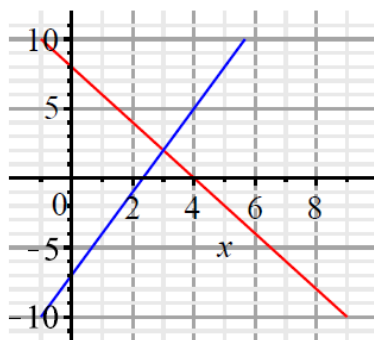
$$2x+y=8$$

$$-3x+y=-7$$

kivonva az elsőt a másodikból:

$$-5x=-15 \text{ azaz } x=3$$

$$\text{ezért } y=2$$

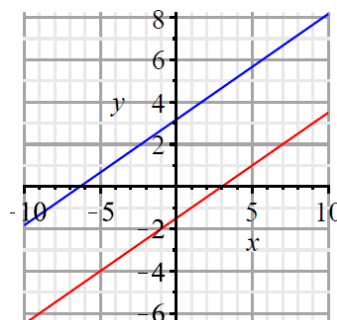


2., A két egyenes párhuzamos, de nem esik egybe, ekkor nincsen közös pontjuk, azaz az egyenletrendszernek nincsen megoldása

$$x-2y=3$$

$$3x-6y=-19$$

kivonva az első háromszorosát a másodikból:



$0 \neq -28$!!!

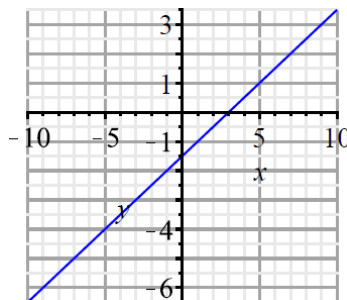
3., Ha a két egyenes párhuzamos és egybe esik, akkor végtelen sok közös pont van, ezért végtelen sok megoldás is.

$$x - 2y = 4$$

$$4x - 8y = 16$$

kivonva az első egyenlet négyszeresét a másodikból:

$$0 = 0$$



Három ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek:

A három ismeretlenes egyenlet, hasonlóan a két ismeretleneshez értelmezhető geometriailag, egy síkot határoz meg. A három ismeretlenes egyenletrendszer pedig síkok egymáshoz való viszonyát határozza meg. Ez többféle lehet:

1., A három sík párhuzamos, de nem egy síkú, tehát nincsen közös pont, azaz nincsen megoldás.

$$1x + 2y + 3z = 5$$

$$2x + 4y + 6z = 6$$

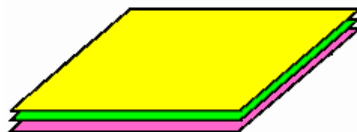
$$3x + 6y + 9z = 18$$

a másodikból kivonva az első kétszeresét, a harmadikból pedig a három szorosát:

$$1x + 2y + 3z = 5$$

$$0 \neq -4$$

$$0 \neq 3$$



2., a., A síkok metszik egymást (akár mind a három páronként, ebben a példában 2 sík párhuzamos) de nincsen(ek) közös pont(ok).

$$x - y + 5z = 2$$

$$2x - 2y + 10z = 5$$

$$y = 3$$

a harmadik egyenletet felhasználva helyettesítsünk vissza

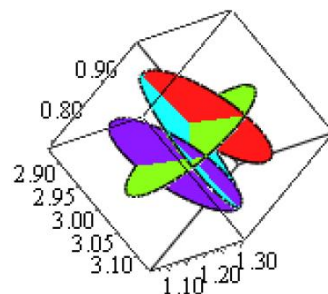
$$x - 3 + 5z = 2$$

$$2x - 6 + 10z = 5$$

vonjuk ki a második egyenletből az első kétszeresét

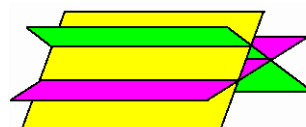
$$x - 3 + 5z = 2$$

$$0 \neq 1 \text{ tehát nem lesz megoldás}$$



A baba kék síkot nem kell figyelembe venni!

b., Ha három sík metszi egymást, de nincs közös pontja mindháromnak:



3., Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ekkor a közös pontok halmazánál gondolhatunk egy síkra, vagy egy egyenesre is.

Sík:

$$3x+2y+5z=7$$

$$4.5x+3y+7.5z=10.5$$

$$9x+6y+15z=21$$

kivonva a másodikból az első másfélszeresét, a harmadikból az első háromszorosát:

$$3x+2y+5z=7$$



Egyenes:

$$x-y+15z=5$$

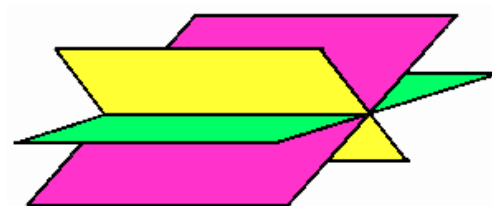
$$4x+60z=20$$

$$y=5$$

kivonva a másodikból az első négyszeresét, illetve az elsőbe és a másodikba behelyettesítve a harmadik egyenletet:

$$x-5+15z=5 \text{ ami egy egyenes egyenlete (a térben!)}$$

$$(20=20)$$

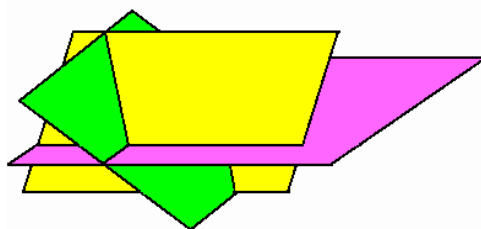


4., Ha az egyenletrendszernek egy konkrét megoldása van, az azt jelenti számunkra, hogy a három sík egy pontban metszi egymást.

$$x+y-z=6$$

$$-x+2y+3z=7$$

$$2x-3y+2z=5$$



a másodikhoz hozzáadom az elsőt, a harmadikból levonom az első kétszeresét:

$$x+y-z=6$$

$$3y+2z=13$$

$$-5y+4z=-7$$

a harmadik egyenletből kivonva a második kétszeresét:

$$x+y-z=6$$

$$3y+2z=13$$

$$-11y=-33 \text{ azaz } y=3$$

az y-t visszahelyettesítve a második egyenletbe:

$$9+2z=13 \text{ azaz } z=2$$

az y-t és a z-t visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe:

$$x+3-2=6 \text{ azaz } x=5$$

Tehát a metszéspont $M=(5;3;2)$

Gauss elimináció:

Lényege: egy egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal (tehát a keletkező egyenletrendszernek ugyan az lesz a megoldása, mint az eredetinek) ún. lépcsős alakra hozzuk

Ekvivalens átalakítások:

- két egyenlet felcserélése
- adott egyenlet szorzása egy nem nulla valós számmal
- az egyenletrendszer valamely egyenletének szám szorosát hozzáadjuk valamely más egyenletéhez

Lépcsős alak kialakítása:

1. Megvizsgáljuk, hogy az első egyenletben az első ismeretlen együtthatója nem nulla-e, ha nulla, akkor kicseréljük egy olyan sorral, ahol nem nulla. Innentől kezdve ez az új egyenletrendszerünk.
2. Az első ismeretlent elkezdjük kiküszöbölni az összes sorból az első kivételével. Ezt úgy érjük el, hogy az i . sorhoz hozzáadjuk az első sor $(-a_{i1}/a_{11})$ -szeresét. Ekkor többféle dolog történhet:
 - az i . sor minden tagja (a konstans tag is) nulla lesz. Ekkor ezt már nem kell többször kiírni, ezt az egyenletet elhagyjuk
 - az i . sor minden tagja, kivéve a konstans tag nulla, akkor tilos sort kaptunk és az egyenletrendszernek nincsen megoldása
 - a fenti két eset nem fordul elő, tovább lépünk (lépcsőzetesen) a második sor, második ismeretlenjének együtthatójához (figyelem, az első sorhoz már nem nyúlunk többet!!)

1., Old meg Gauss eliminációval!

$$5x=25$$

$$3y=3$$

Két ismeretlenünk van, de egyik egyenletben mindig csak az egyik szerepel. Ezt így is értelmezhetjük:

$$5x+0y=25$$

$$0x+3y=3$$

Két dolgot látunk. Az egyik, hogy a műveleti jeleket fölösleges leírni, a másik, hogy az ismeretleneket is, ha tudjuk, hogy az első oszlopban szereplő együtthatók az első ismeretlenhez tartoznak, a második oszlopban szereplők pedig a másodikhoz.

5x	+	0y	=	25
0x	+	3y	=	3



$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \backslash \div 5 \\ \backslash \div 3 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Nem elfelejtve, hogy mit is jelentenek az oszlopok:}$$

$$1x+0y=5 \text{ azaz } x=5$$

$$0x+1y=1 \text{ azaz } y=1$$

2., Old meg Gauss eliminációval!

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 - 8x_3 = 8$$

$$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \backslash +4 * \text{I. sor} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \backslash \div 2 \\ \end{array} \sim$$

Ha elosztom kettővel, majd a három szorosát adom hozzá az megfelel az algoritmusban leírtaknak, vagyis, hogy a $(-\frac{3}{2})$ szeresét adom hozzá

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \backslash +3 * \text{II. sor} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Mit kaptunk? Induljunk el a lépcső legaljáról!

- **$1x_3=3$** tehát tudjuk, hogy a harmadik változónk 3 lesz
- **$1x_2+(-4x_3)=4$** Itt már az x_3 -at be tudjuk helyettesíteni, tehát:
 $1x_2+(-4*3)=4$ vagyis $x_2=16$!
- **$1x_3+(-2x_2)+x_3=0$** Mivel már az x_2 -t és az x_3 -at ismerjük, ezért csak egyszerűen behelyettesítünk:
 $1x_3+(-2*16)+1*3=0$ azaz $x_1=29$

3., Old meg Gauss eliminációval!

$$x_2 - x_3 - x_4 = -1$$

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7$$

$$3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \backslash \text{I és II. sor csere} \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \backslash +(-2) * \text{I. sor} \\ \backslash +(-3) * \text{I. sor} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \backslash +(-5) * \text{II. sor} \\ \backslash +(-5) * \text{II. sor} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy két sor kiesett. A megmaradt egyenletünk:

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = -1$$

A négyzetünk főátlójában lévő két ismeretlent az x_1 és x_2 -t nem választhatjuk szabadon.

Ezeket kell kifejezni a többi ismeretlennel, de ez által, egy általános megoldást kapunk, tehát az egyenletrendszerünknek nem egy megoldása van, hanem végtelen.

$$x_4 = p \quad p \in \mathbb{R}$$

$$x_3 = q \quad q \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = -1 + p + q$$

$$x_1 = -1 + 4(-1 + p + q) - 2q = -5 + 4p + 2q \quad \backslash \text{Ne felejtsük el, hogy csak } p \text{ és } q \text{ legyen benne!!!}$$

Végtelen sok ilyen számnégyes létezik. Egy megoldás pl:

$$x_4 = 1 \quad x_3 = 2 \quad x_2 = -1 + 1 + 2 = 2 \quad x_1 = -5 + 4 + 4 = 3$$

$$2 - 2 - 1 = -1$$

$$3 - 4 * 2 + 2 * 2 = -1$$

$$2 * 3 - 3 * 2 - 2 - 5 = -7$$

$$3 * 3 - 7 * 2 + 2 - 5 = -8$$

4., Old meg Gauss eliminációval!

$$a - 8b + 9c = -32$$

$$2a - b + 3c = -1$$

$$a + 2b - c = 12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \backslash -2 * \text{I. sor} \\ \backslash -\text{I. sor} \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 15 & -15 & 63 \\ 0 & 10 & -10 & 44 \end{bmatrix} \backslash -1.5 * \text{III. sor}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & 9 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 44 \end{bmatrix}$$

Kaptunk egy tilos sort! Az egyenletrendszernek nincsen megoldása.

$$0 * a + 0 * b + 0 * c \neq 1$$

5., Mi legyen a c paraméter, hogy a feladat megoldható legyen!

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 12 \\-x_1 - x_2 + 4x_3 &= -12 \\-2x_1 + x_2 + x_3 &= c\end{aligned}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 9 \\ 12 \\ -12 \\ c \end{array}\right) \begin{array}{l} \backslash -\text{I. sor} \\ \backslash +\text{I. sor} \\ \backslash +2 * \text{I. sor} \end{array} \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ -3 \\ 18+c \end{array}\right) \backslash -3 * \text{II. sor} \sim$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ -1 \\ 9+c \end{array}\right) \backslash +7 * \text{III. sor} \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ -1 \\ 2+c \end{array}\right)$$

Tehát akkor nem lesz tilos sor (azaz lesz megoldása), ha $c = -2$.

Ekkor pedig:

$$x_3 = -1 \quad x_2 + 2x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 + 2 = 5 \quad x_1 + x_2 - x_3 = 9 \rightarrow x_1 = 9 - 5 - (-1) = 3$$

6., Válasszuk meg a paramétert úgy, hogy az egyenletnek

- Pontosan egy megoldása legyen
- Ne legyen megoldása
- Végtelen megoldása legyen

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= p\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & p \end{array}\right] \backslash \text{I és II. sor csereje} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & p \end{array}\right] \backslash \begin{array}{l} -2 * \text{I. sor} \\ -\text{I. sor} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & p-2 \end{array}\right] \backslash * (-1) \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & p-2 \end{array}\right] \backslash -\text{II. sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p-5 \end{array}\right] \backslash -\text{II. sor}$$

a., Ahhoz, hogy pontosan egy megoldása legyen, a főátlóban mind a négy ismeretlennek szerepelnie kéne. De e helyett csak kettő szerepel, tehát NEM lehet csak egyetlen megoldása.

b., Ahhoz hogy ne legyen megoldása, tilos sort kell kapnunk, ami úgy állhat elő, ha $p-5 \neq 0$ vagyis a p bármely racionális szám lehet az 5-ön kívül.

c., Ahhoz, hogy végtelen megoldás legyen, adott, hogy csak két ismeretlen szerepel a főátlóban, de arra is szükségünk van, hogy ne kapjunk tilos sort, vagyis $p=5$.

Ez esetben mi az általános megoldás?

$$x_4 = s \quad s \in \mathbb{R}$$

$$x_3 = t \quad t \in \mathbb{R}$$

$$5x_2 - 3t + 7s = 3 \quad \text{ezért} \quad x_2 = \frac{3+3t-7s}{5}$$

$$x_1 + 2x_2 - t + 4s = 2 \quad \text{ezért} \quad x_1 = 2 + t - 4s - 2 \left(\frac{3+3t-7s}{5} \right)$$

Gauss-Jordan elimináció:

Hasonlóan a Gauss eliminációhoz egy egyenletrendszer megoldása a cél. Ezt a redukált lépcsős alak létrehozásával érhetjük el. Az egyenlet rendszerünket Gauss eliminációval lépcsős alakra hozzuk, majd a főátló legutolsó elemét (legutolsó sor) vezéregyessé alakítjuk. Ezt úgy érjük el, hogy megszorozzuk a reciprokjával. Majd ennek a vezéregyesnek a felhasználásával kiküszöböljük a felette lévő sorban szereplő ismeretleneket és így haladunk felfele tovább.

1.,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \setminus -I. \text{ sor} \\ \setminus -2 * I. \text{ sor} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array} \right] \setminus (-\frac{1}{3}) * II. \text{ sor} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} & -\frac{14}{3} \end{array} \right] \setminus \div (-\frac{14}{3}) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Végeztünk a Gauss eliminációval, folytassuk a Gauss-Jordant

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \setminus -2 * III. \text{ sor} \\ \setminus +III. \text{ sor} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \setminus \div 3 \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \setminus +\text{II. sor} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Létrehoztuk a redukált lépcsős alakot, ahol a főátlóban csak vezéregyesek állnak és a megoldás könnyen leolvasható belőle.

$$x=-1 \qquad y=-1 \qquad z=1$$

2.,

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \setminus +2 * \text{I. sor} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 6 & 14 \end{bmatrix} \setminus -2 * \text{II. sor} \quad \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \setminus -\text{II. sor} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \setminus * (-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \setminus * (-1) \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3=t \quad t \in R$$

$$x_2-3t=-7 \quad \text{ezért} \quad x_2=3t-7$$

$$x_1-2t=-2 \quad \text{ezért} \quad x_1=2t-2$$

Forrás: <http://szrsz.epigramma.hu/tananyag/12aegyenletrendszerek.pdf>

http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_MAT6/ch01s06.html

http://nimbus.elte.hu/~lagzi/vektor_gyakplsor8_mo.pdf

http://rs1.sze.hu/~simonne/Gyakorlofeladatok/Linearisalgebra/zh_linearis_2011.pdf