Determinánsok

Elméleti bevezető

Def. (mátrix): Legyen T egy kommutatív test, k, n pozitív egészek! A test feletti $k \times n$-es mátrix egy téglalap alakú táblázat, melynek k sora és n oszlopa van, elemei pedig T-ből valók.

Mátrix determinánsa egy szám, a kifejtési tétel alapján, ha $\mathbf{A} \in \mathbf{T}^{n \times n}$, akkor $\det(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \propto_{\mathbf{ij}} * \mathbf{A_{ij}} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \propto_{\mathbf{ij}} * \mathbf{A_{ij}}$. Ahol $\mathbf{A_{ij}}$ az α_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns (azaz az előjel nélküli aldeterminánsnak $(-1)^{i+j}$-szerese).

Tulajdonságok:

1. A determináns tetszőleges sorát λ-val szorozva a determináns értéke λ-szorosára változik.
2. Ha a determináns tetszőleges sora kéttagú összeg, a determináns előáll két determináns összegeként, ahol a kérdéses soron kívül minden sor ugyanaz, de az egyik determinánsban az adott sorban rendre az összeg egyik tagjai, a másik determinánsban az adott sorban rendre az összeg másik tagjai szerepelnek.
3. Ha az egyik sor tisztán nulla, akkor a determináns értéke is 0.
4. A determináns tetszőleges két sorát megcserélve a determináns értéke a -1-szeresére változik.
5. Ha a determináns tartalmaz két sort, amelyek elemei rendre egyenlők, a determináns értéke 0.
6. A determináns i. sorához a j. sor λ-szorosát adva a determináns értéke nem változik.
7. Alsó- vagy felsőháromszög-determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata (figyelem: a főátló, nem pedig a mellékátló alatt/felett álló elemeknek kell nulláknak lenni).
8. Ferde „kifejtés”: egy sor elemeit rendre egy másik sor elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokkal megszorozva a szorzatok összege 0.
9. A fenti tételek oszlopokra is igazak.
10. Mátrix determinánsa egyenlő a mátrix transzponáltjának determinánsával.

    Azaz a determináns Gauss-eliminálható, és ha sikerül valamelyik spec esetet előállítani (két egyenlő sor (oszlop), csupa nulla sor (oszlop), alsó/felső háromszög), akkor könnyebb a számolás (de ha növekszik a determinánsban a nullelemek száma, az is nagy segítség).

Cramer-szabály: adott az $\underline{A}*\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszer, ahol $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ha $\det(\underline{A}) \neq 0$, akkor létezik egyértelmű megoldás, ez pedig $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, ahol $\underline{\underline{A}}_i$-t úgy nyerjük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrix *i.* oszlopvektorát $\underline{b}$-re cseréljük.

Feladatgyűjtemény

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$
2. $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

3. $D=\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 5 & -6 & 3\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}$

4. $D=\begin{vmatrix}28 & 25 & 38\\ 42 & 38 & 65\\ 56 & 47 & 83\end{vmatrix}$

5. $D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2 & 4\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix}$

6. $D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 2 & -1 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -4 & -5\\ 3 & -4 & 5 & 6\end{vmatrix}=-304$. Lássuk ezt be!

7. $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$

8. $D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$

9. Számítsuk ki y értékét!

$$\left.\begin{array}{l}x+2y+3z=14\\ y+2z+3t=20\\ z+2t+3x=14\\ \underline{t+2x+3y=12}\end{array}\right\}$$

10. Bizonyítsuk be a determináns kifejtése nélkül, hogy $D=\begin{vmatrix}-4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4\end{vmatrix}=0$

11. $D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5\\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2\end{vmatrix}$

Megoldások

1. Kivonjuk a második oszlop kétszeresét a harmadik oszlopból, majd eszerint kifejtjük:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 8-2*4\\ -2 & 1 & 5-2*1\\ -3 & 2 & 4-2*2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 0\end{vmatrix}=-42$$

2. Az első sorból levonva a második háromszorosát, a harmadik sorhoz hozzáadva a kétszeresét, majd az első oszlop szerint kifejtve:

$$D=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 9 & 2\end{vmatrix}=-32$$

3. Az utolsó sor (-2)-szeresét az első sorhoz, 3 szorosát a másodikhoz adva, majd a második oszlop szerint kifejtve:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 5 & -6 & 3\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 0 & 2\\ 17 & 0 & -6\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}=-4$$

4. Emeljünk ki az első sorból 14-et, a majd az első oszlop 12-szeresét a második oszlopból és 20-szorosát a harmadik oszlopból levonva csökken az elemek nagysága:

$$D=\begin{vmatrix}28 & 25 & 38\\ 42 & 38 & 65\\ 56 & 47 & 83\end{vmatrix}=14*\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

   Ezután a második oszlop kétszeresét az első oszlopból kivonjuk, a harmadikhoz hozzáadjuk, és az első sor szerint kifejtjük:

$$D=14*\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=14*\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 9\\ 6 & -1 & 1\end{vmatrix}=770$$

5. Adjuk a második sor kétszeresét az elsőhöz, háromszorosát vonjuk le a haramdikból, majd fejtsük ki a harmadik oszlop szerint:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2 & 4\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8 & -1 & 0 & 8\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ -6 & 8 & 0 & -2\\ -2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=-1*\begin{vmatrix}8 & -1 & 8\\ -6 & 8 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}$$

   Most adjuk hozzá a második oszlop nyolcszorosát az első és harmadik oszlopokhoz, és az első sor szerint kifejtve:

$$D=-1*\begin{vmatrix}8 & -1 & 8\\ -6 & 8 & -2\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 58 & 8 & 62\\ 30 & 4 & 37\end{vmatrix}=-286$$

6. Használjuk ki, hogy az első oszlop első eleme egyes, és nullázzuk ki vele az oszlop többi elemét.
7. A negyedik oszlopot kivonjuk a harmadikból, és a harmadik sor szerint kifejtjük:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

8. A második sort hozzáadjuk az elsőhöz és a harmadikhoz, majd a harmadik oszlop szerint kifejtjük:

$$D=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 0\end{vmatrix}=0$$

9. Cseréljük meg az első és a hatodik, a második és az ötödik, valamint a harmadik és a negyedik oszlopokat, ekkor alsóháromszög determinánst kapunk, értéke a főátlóban álló elemek szorzata (és a három oszlopcsere miatt $(-1)^3=-1$-gyel szorozzuk):

$$D=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=-6!=-720$$

10. A Cramer-szabályt fogjuk használni, előbb rendezzük a determináns könnyebb felírásához az egyenleteket:

   x+2y+3z+0t=14

0x+y+2z+3t=20

3x+0y+z+2t=14

<u>2x+3y+0z+t=12</u>

Így az egyenletrendszer determinánsa: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Vonjuk ki az első oszlop kétszeresét a másodikból, háromszorosát a harmadikból, majd fejtsük ki az első sor szerint:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

Adjuk az első sort a harmadikhoz, háromszorosát a másodikhoz, majd fejtsük ki az első oszlop szerint:

$$D = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 * 2 * \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 96$$

Azaz mivel D≠0, ezért van egyértelmű megoldás.

Számoljuk ki D_y-t: $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Kiemelünk kettőt a második oszlopból, majd az első sor kétszeresét kivonjuk a negyedikből, háromszorosát a harmadikból, és kifejtjük az első oszlop szerint:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & -14 & -8 & 2 \\ 0 & -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 * \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

Kiemelünk az első és második oszlopokból kettőt-kettőt, majd kivonjuk a harmadik sor kétszeresét a másodikból, háromszorosát az elsőből, és kifejtjük a harmadik oszlop szerint:

$$D_y = 2 * 2 * 2 * \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8 * \begin{vmatrix} 17 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 192$$

Azaz $y = \frac{D_y}{D} = \frac{192}{96} = 2$

11. Adjuk hozzá az első oszlophoz a többit, ekkor $D = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból és az utolsó kettőből, kétszeresét a harmadikból, majd fejtsük ki a determinánst a harmadik sora szerint:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -5 & -3 & -6 \\ 3 & -5 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -3 & -6 \\ -5 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

Adjuk a harmadik oszlop háromszorosát az elsőhöz és a másodikhoz, majd fejtsük ki a második sor szerint:

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -3 & -6 \\ -5 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -14 & -14 & -3 & -6 \\ -8 & -7 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-1) * \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ -14 & -14 & -6 \\ -8 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

Hogy ne kelljen nagy számokat összeadni, a második sorból emeljünk ki (-2)-t, és adjuk a második sort a harmadikhoz és az elsőhöz, és fejtsük ki valamelyik 0-t tartalmazó sor vagy oszlop szerint:

$$(-1) * \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ -14 & -14 & -6 \\ -8 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -12 & -8 & -3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -8 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 118$$

Források:

- Freud Róbert: Lineáris algebra, Eötvös Kiadó, Budapest, 2006
- Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973