

# Diszkrét Matematika I. megoldások:

## bázistranszformáció, diagonalizálás

Összeállította: Juhász János, Molekuláris bionika 2. évfolyam (2010/2011 1. félév)

### Bázistranszformáció

$$1.a: \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}_{[a]}$$

$$1.b: \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,4 \\ 1,2 \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}_{[e]}$$

$$2.a: \underline{\mathbf{x}}_{[e]} = \underline{\mathbf{B}}^* \underline{\mathbf{x}}_{[b]} \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2.b: \underline{\mathbf{B}}^{-1} * \underline{\mathbf{x}}_{[e]} = \underline{\mathbf{x}}_{[b]} \text{ (ábra)} \quad \underline{\mathbf{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2.c: \underline{\mathbf{B}}^{-1} * \underline{\mathbf{x}}_{[e]} = \underline{\mathbf{x}}_{[b]} \text{ (ábra)} \quad -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{[e]} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -13 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{[b]}$$

$$3.a: \underline{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3.b: \underline{\mathbf{C}}^{-1} * \underline{\mathbf{B}}^{-1} * \underline{\mathbf{x}}_{[e]} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{[b]} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}_{[c]}$$

$$3.c: \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{x}} \quad \begin{bmatrix} 11 & 24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -117 & 26 \\ 52 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \underline{\mathbf{B}}^* \underline{\mathbf{x}}_{[b]} = \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{x}}_{[a]}$$

4.a:  $\underline{\mathbf{x}}_{[b]} = \underline{\mathbf{B}}^{-1} * \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{x}}_{[a]}$  ha az  $\underline{\mathbf{x}}_{[a]}$  ismert a transzformáció mátrixa:

$$\underline{\mathbf{B}}^{-1} * \underline{\mathbf{A}} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -8 & 24 & -15 \\ 8 & -21 & 12 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4.b: \underline{\mathbf{A}}^{-1} * \underline{\mathbf{B}} * \underline{\mathbf{x}}_{[b]} = \underline{\mathbf{x}}_{[a]} \text{ ha az } \underline{\mathbf{x}}_{[b]} \text{ ismert a transzformáció mátrixa: } \underline{\mathbf{A}}^{-1} * \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

5.a: A leképezés mátrixa:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{AS}_{X[s]} = (A)_{X[e]}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[s]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[s]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 36 \end{bmatrix}_{[e]}$$

5.b: Mivel a képtér legfeljebb 2 dimenziós (a vetítés miatt ( $\underline{T}^{-1}\underline{AS}$  -nál változhatnak a dimenziószámok, mert nem feltétlenül transzformáció van)), ezért elég a képtérben egy a jk-t kifeszítő 2 elemű 2D-s bázist (nem párhuzamos vektorok) választani és azzal számolni (2db 3 elemű bázis már

nem biztos, hogy a jk síkra vetít!). Ilyen az  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -30 \\ 36 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 36 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -258 \\ 96 \end{bmatrix}$$

Az a, feladat végeredményét megkaphatjuk a  $\underline{TA}'_{X[s]} = (A)_{X[e]}$  képlettel is. ( $\underline{A}' = \underline{T}^{-1}\underline{AS}$ )

6.a: Fontos megvizsgálni, hogy [s] valóban bázis-e, mert ha az egyenletek LÖF rendszert alkotnak akkor a determináns 0, ekkor nem lehet invertálni.  $(A)_{X[s]} = \underline{S}^{-1}\underline{AX}_{[e]}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} -5 & -15 & 10 \\ 6 & 30 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 0 & -50 & 35 \\ 12 & 132 & -30 \\ -24 & 36 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 495 \\ -834 \\ -252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,25 \\ 13,9 \\ 4,2 \end{bmatrix}$$

6.b:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 5 & -85 \\ -180 & 174 & 102 \\ 0 & 72 & 156 \end{bmatrix}$

Az a, feladat végeredményét megkaphatjuk a  $\underline{S}^{-1}\underline{A}'_{X[e]} = (A)_{X[s]}$  képlettel is. ( $\underline{A}' = \underline{S}^{-1}\underline{AS}$ )

7.:  $\underline{A}' = \underline{T}^{-1}\underline{AS}$   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -11 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

8.a:

$$\underline{A}' = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.b:  $(A)_{x_{[e]}} = \underline{S}^* \underline{A}' x_{[a]} = \underline{A}' \underline{S}^* x_{[a]} =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

8.c:  $(A)_{y_{[a]}} = \underline{S}^{-1} \underline{A}' y_{[e]} = \underline{A}' \underline{S}^{-1} y_{[e]} =$  .

források: PPKE wiki:

1.b, 4., 7., 8.: konzultáció 2009 ;

1.a, 2., 3., 5., 6.: konzultáció 2010 Juhász János.

### Diagonalizálás

1.

$a$   $c$   $d$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b: \text{nem\_diagonalizálható} \quad \begin{bmatrix} 6i & 0 \\ 0 & -6i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$e$   $f$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.a:

characteristic polynomial =  $X^2 - 4X + 3$

Value	Multiplicity	Vector
3	1	(1,1)
1	1	(1,-1)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.b:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{29} & \frac{-15}{29} \\ \frac{-15}{29} & \frac{-14}{29} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -29$$

$$\text{characteristic polynomial} = X^2 - 28X - 29$$

Sajátérték	Multiplicitás	Sajátvektor
29	1	(1,-1)
-1	1	(1,1)

$$D = \begin{pmatrix} -29 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.c:

$$\text{characteristic polynomial} = X^3 - 27X + 54$$

Value	Multiplicity	Vector
-6	1	(1,2,-2)
3	2	(1,0,1/2), (0,1,1)

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

3.a:

$$\text{sajátértékek } \det(A) = (-3-\lambda)(7-\lambda) - (12(-2)) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\text{és } \lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$$

Az ezekhez tartozó sajátvektorok:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ és } s_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ innen képezve } S\text{-t: } S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{inverz} \rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Végül: } D = S^{-1}AS \rightarrow \text{megkapjuk a diagonális mátrixot } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3.b: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4.a: \text{sajátértékei: } 5, 4 \text{ az ezekhez tartozó sajátvektorok rendre: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Behelyettesítve a fenti képletbe: } A = SDS^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**4.b:**  $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)^2(1-\lambda)$ , a sajátértékek:  $\lambda=2$  kétszeres multiplicitással,  $\lambda=1$ , egyszeres multiplicitással.

Visszahelyettesítve a

$\det(A-\lambda I)\underline{x}=0$  egyenletbe, kapjuk a sajátvektorokat:

$$\lambda=1\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda=2\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ és } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint a  $\lambda=2$  -höz tartozó sajátaltér dimenziója 2, ez egyezik az algebrai multiplicitással, így a

mátrix diagonalizálható. A diagonális mátrix:  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**4.c:**

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(-2-\lambda).$$

$\lambda = -1$ :

$$(A + I_n)X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}.$$

Ez a  $-y + z = 0$ -val ekvivalens:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 2I_n)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -2$  sajátértékhez tartozó (oszlop)vektort írjuk előre, akkor viszont:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**4.d:**

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{matrix} 0x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez nem írható fel **két** független vektor összegeként, tehát ez a mátrix nem diagonalizálható.

Másképpen: A geometriai multiplicitás (a sajátaltér dimenziója (1) nem egyenlő az algebrai multiplicitással (2))

**4.e:** A sajátvektorok:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**5.a:** Sajátértékek meghatározása:  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ ,  $\lambda_1=4$ ,  $\lambda_2=-3$ ,

$$\lambda_1=4, \begin{bmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 6 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=2/3p, x_2=p \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} p=sv_1, p \in R/\{0\}$$

$$\lambda_2=-3, \begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=-1/2q, x_2=q \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} q=sv_2, q \in R/\{0\}$$

Ha  $p=q=6$ , akkor  $\underline{S}=[sv_1 \ sv_2]= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

$$\underline{D}=\text{diag}(\underline{A})=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{42} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 18 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 168 & 0 \\ 0 & -126 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & (-3)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}^3 = \underline{S}\underline{D}^3\underline{S}^{-1}$$

=

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{42} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 256 & 81 \\ 384 & -162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 1050 & 1092 \\ 3276 & 504 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 78 & 12 \end{bmatrix}$$

**5.b:**

Sajátértékek meghatározása:  $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ,  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=1$ ,

$$\lambda_1=2, \begin{bmatrix} 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=p, x_2=0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} p=sv_1, p \in R/\{0\}$$

$$\lambda_2=1, \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=-3q, x_2=q \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} q=sv_2, q \in R/\{0\}$$

$$\text{Ha } p=q=1, \text{ akkor } \underline{S}=[sv_1 \ sv_2]=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}=\text{diag}(\underline{\Delta})=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}^5=\begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 1^5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}^5=\underline{S}\underline{D}^5\underline{S}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 & 93 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**5.c:**

$$A = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$B^3 = A.$$

Vagyis **B** a köbgyöke **A**-nak.

5.d: A diagonlis mátrix:  $\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\underline{D}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

források: PPKE wiki:

1. : szigorlati példafeladatok 2010. Juhász János

2.: konzultáció, András Zoltán

3.: 2008. Gáspár Nándor

4.: 2008. Bércesné Novák Ágnes

5.a: konzultáció 2010. Juhász János, b: konzultáció 2009. Lakatos Eszter, c: 2008. Bércesné Novák Ágnes