

# Diszkrét Matematika I. konzultáció 2010/2011 1. félév

Összeállította: Juhász János, Molekuláris bionika 2. évfolyam

## Bázistranszformáció

A kérdés, hogy ha az eddig használt bázisból egy másik bázisra szeretnénk áttérni, akkor hogyan lehet kiszámolni a vektorok új koordinátáit kiszámolni a régi koordináták és az új bázis segítségével.

Pl.: 1.a: eredeti bázis:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_2$ , ekkor:  $\underline{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]}$ , ez azt jelenti, hogy

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ (mátrix * vektor)}$$

Új bázis:  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = a_2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[a]} = \underline{v}$ , az előzőhöz hasonlóan:  $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[a]} = x \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .

x és y a koordináták, belőlük áll elő a vektor az adott bázisban ( $_{[a]}$ ) ez a koordinátás alak,

(A mátrix a bázistranszformáció mátrixa (mint az eddig tanult transzformációknál, leképezéseknél)).

Lényegében ugyanarról a vektorról beszélünk (a képük fedné egymást, ha egy olyan koordináta-rendszerben ábrázolnánk, ahol a bázisvektorok ugyanabban a bázisban vannak felírva (PL.: a kanonikusban)), ezért:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ (balról szorzok a } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ inverzével)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[a]}, \text{ (inverz} = (1/\text{Det } \underline{A}) * \text{Adj } \underline{A}. \text{ Adjungált: minden elemhez}$$

hozzárendelem a megfelelő előjeles aldeteminánst és aztán transzponálom. Speciálisan 2x2-es

$$\text{esetén: } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

az inverz nem létezik ha a determináns 0, ekkor a mátrix által meghatározott egyenletrendszer LÖF, így nem is alkotnak bázist a „bázisvektorok” az adott dimenziós vektortérben.)

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}_{[a]},$$

$$\text{Ellenőrzésül: } \underline{v} = \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}_{[a]} = 1,8 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3,6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]}$$

b: Fordítva is gondolkodhatunk: ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy az  $_{[a]}$  bázisban megadott vektor

$$\text{koordinátái mik az }_{[e]} \text{ bázisban, akkor így számolunk: } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[e]},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}_{[e]}.$$

Általánosan is elmondható:  $\underline{\underline{E}} * \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{x}}_{[a]} \rightarrow \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{x}}_{[a]} \rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{x}}_{[a]}$

(Ha nem az egyik bázisban van megadva a másik (Pl.:mint fentebb a kanonikusban), hanem egy közös 3. bázisban:

$\underline{\underline{B}} * \underline{\underline{x}}_{[b]} = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{x}}_{[a]} \rightarrow \underline{\underline{x}}_{[b]} = \underline{\underline{B}}^{-1} * \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{x}}_{[a]}$  ha az  $\underline{\underline{x}}_{[a]}$  ismert,

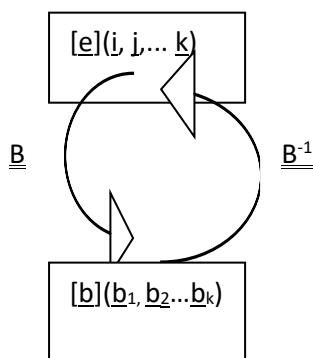
$\underline{\underline{A}}^{-1} * \underline{\underline{B}} * \underline{\underline{x}}_{[b]} = \underline{\underline{x}}_{[a]}$  ha az  $\underline{\underline{x}}_{[b]}$  ismert.)

(Emlékeztetőül: lineáris leképezés (n dimenziós vektortérből k dimenziósba) mátrixa k\*n-es típusú és:

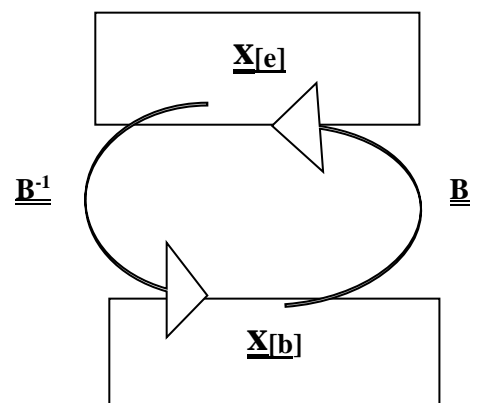
$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{A}} * \underline{\underline{x}}$   $\underline{\underline{A}}$  a leképezés mátrixa,  $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}})$  a  $\underline{\underline{x}}$  képe.

Lineáris transzformációnál a kiindulási és a képtér azonos dimenziójú.)

A leképezés/transzformáció mátrixa a kiindulási tér bázisvektorainak képeit tartalmazza a képtér bázisában felírva.



Bázis: Mint amikor lineáris transzformációt csinálunk



vektorok: koordinátás alak pont fordítva, mivel :

$$\underline{\underline{E}} * \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{B}} * \underline{\underline{x}}_{[b]} \rightarrow \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{B}} * \underline{\underline{x}}_{[b]} \rightarrow \underline{\underline{B}}^{-1} * \underline{\underline{x}}_{[e]} = \underline{\underline{x}}_{[b]}$$

( $\underline{\underline{B}}$  a bázistranszformáció mátrixa b bázisból a kanonikusba, a  $\underline{\underline{B}}^{-1}$  a másik irányba történő bázistranszformáció mátrixa.)

Ezek alapján:

2. a: Mi a  $\underline{\underline{b}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{[e]}$ ,  $\underline{\underline{b}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$  bázisban felírt koordinátás alakból az  $i, j$  bázisban felírt

koordinátás alakba a bázistranszformáció mátrixa?

$$\underline{x}_{[e]} = \underline{B} * \underline{x}_{[b]} \quad (\text{ahogy az ábrán is látszik}) \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

b: Az i, j- s koordinátás alakból a b<sub>1</sub> b<sub>2</sub>-ős koordinátás alakba áttérés mátrixa?

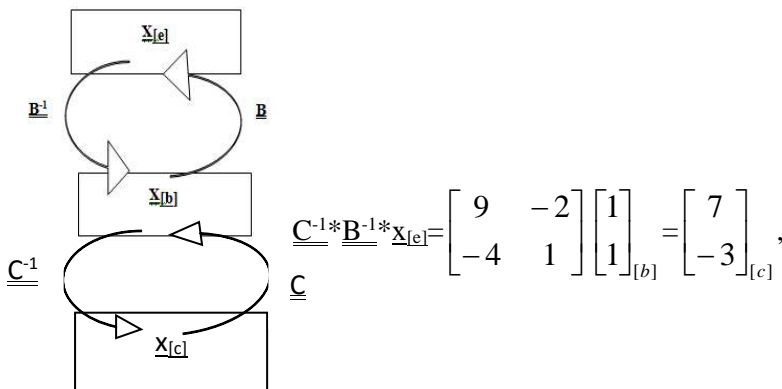
$$\underline{B}^{-1} * \underline{x}_{[e]} = \underline{x}_{[b]} \quad (\text{ábra}) \quad \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

c:  $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{[e]}$  képe [b]-ben?  $\underline{B}^{-1} * \underline{x}_{[e]} = \underline{x}_{[b]}$  (ábra)  $-\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{[e]} = -\frac{1}{13} \begin{bmatrix} -13 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{[b]}$

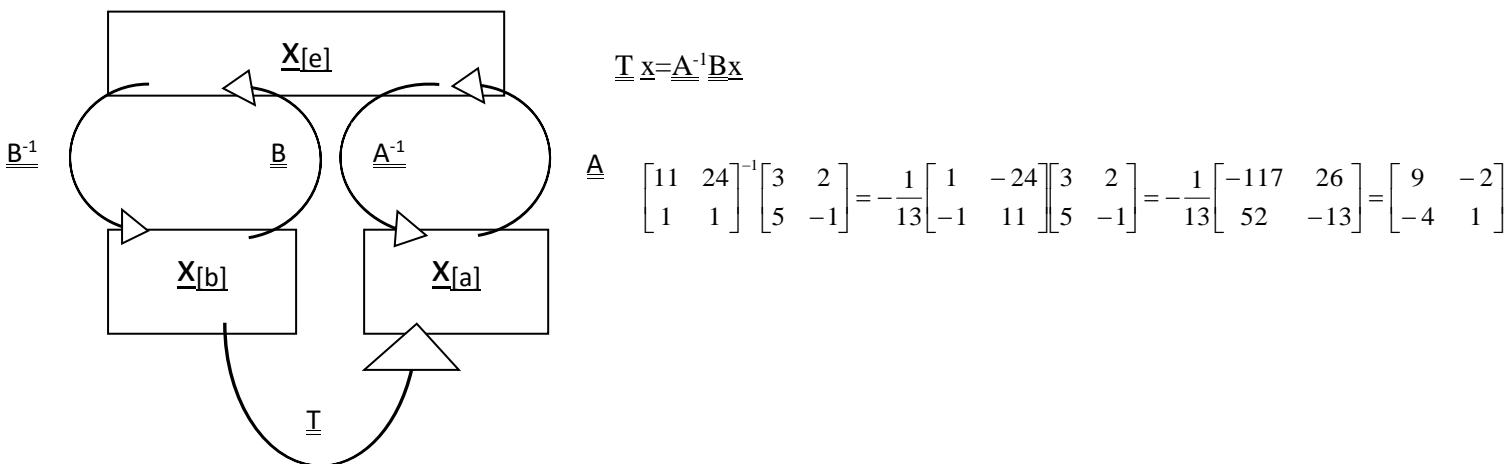
3.a: Milyen bázistranszformációs mátrix segítségével adjuk meg a  $\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{[b]}$   $\underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}_{[b]}$  bázisban felírt koordinátás alakot a [b]-ben felírt koordinátás alakból (az előző feladat [b]-je)? ( $\underline{[e]} := \underline{[b]}$ )

$$\underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

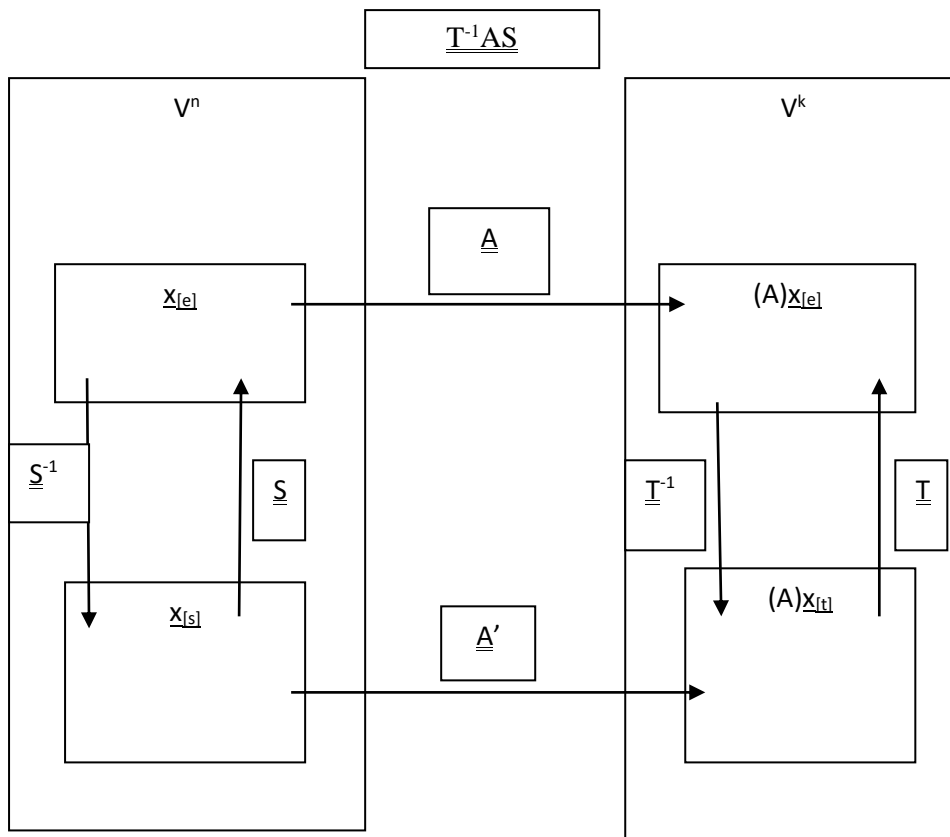
b:  $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{[e]}$  képe [c]-ben?



c: Mi a  $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{[e]}$ ,  $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$  bázisban felírt koordinátás alakból az  $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]}$ ,  $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]}$  bázisban felírt koordinátás alakba a bázistranszformáció mátrixa?



Ábrák:  $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{S}$  és  $\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$  (és egyéb lineáris leképezést tartalmazó feladatok) számításának szemléltetésére:



$$(A)\underline{x}_{[e]} = \underline{A} \underline{x}_{[e]}$$

$$(A)\underline{x}_{[e]} = \underline{T} (A)\underline{x}_{[t]}$$

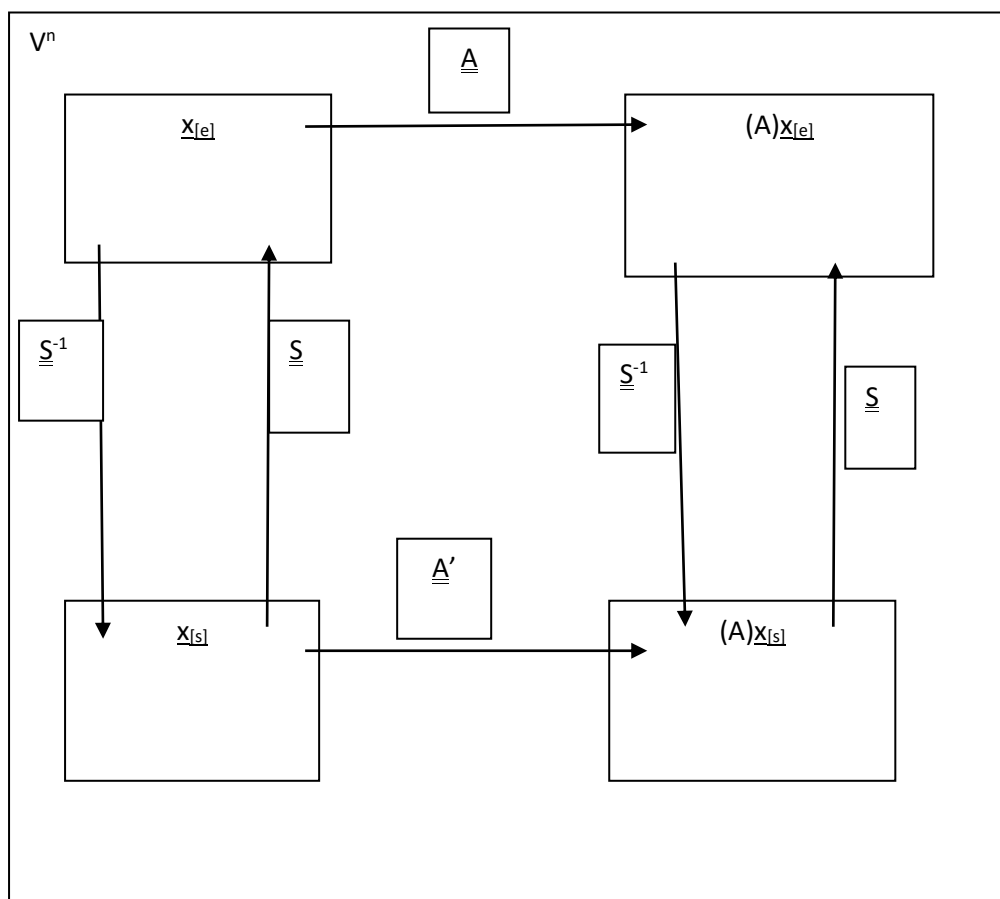
$$\underline{x}_{[e]} = \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

tehát:

$$\underline{T} (A)\underline{x}_{[t]} = \underline{A} \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

$$(A)\underline{x}_{[t]} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

$$\underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S}$$



$$(A)\underline{x}_{[e]} = \underline{A} \underline{x}_{[e]}$$

$$(A)\underline{x}_{[e]} = \underline{S} (A)\underline{x}_{[s]}$$

$$\underline{x}_{[e]} = \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

tehát:

$$\underline{S} (A)\underline{x}_{[s]} = \underline{A} \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

$$(A)\underline{x}_{[s]} = \underline{S}^{-1} \underline{A} \underline{S} \underline{x}_{[s]}$$

4.a: Mi lesz az  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[s]}$  vektor képe a kanonikus bázisban, ha a j, k síkra vetítjük és 3-szorosára nyújtjuk

j és k irányban is?  $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]}$

A leképezés mátrixa:  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{AS}_{[s]} = (A)X_{[e]}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[s]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{[s]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 36 \end{bmatrix}_{[e]}$$

b: Mi lesz az előbbi vektor képe, ha a képtérben a  $\underline{t}_{[1]} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\underline{t}_{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\underline{t}_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$  bázisra

térünk át? ( $\underline{T}^{-1}\underline{AS}$ )

Mivel a képtér legfeljebb 2 dimenziós (a vetítés miatt ( $\underline{T}^{-1}\underline{AS}$  -nál változhatnak a dimenziószámok, mert nem feltétlenül transzformáció van)), ezért elég a képtérben egy a jk-t kifeszítő 2 elemű 2D-s bázist (nem párhuzamos vektorok) választani és azzal számolni (2db 3 elemű bázis már nem biztos,

hogy a jk síkra vetít!). Ilyen az  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{[e]}$   $\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}_{[e]}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -30 \\ 36 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 36 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -258 \\ 96 \end{bmatrix}$$

c: Az a, feladat végeredményét megkaphatjuk a  $\underline{TA}'X_{[s]} = (A)X_{[e]}$  képlettel is. ( $\underline{A}' = \underline{T}^{-1}\underline{AS}$ )

5. a: A max másodfokú polinomokra adott egy leképezés, melynek mátrixa  $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . A

kiindulási térben a kanonikus bázis érvényes ( $k_1=x^2$ ,  $k_2=x$ ,  $k_3=1$ ), a képtérben pedig  $\underline{s}_1=6$ ,  $\underline{s}_2=2x+3$ ,  $\underline{s}_3=-5x^2+x-1$ . Mi lesz a  $3x^2-5x+7$  polinom képe?

Fontos megvizsgálni, hogy [s] valóban bázis-e, mert ha az egyenletek LÖF rendszert alkotnak akkor a determináns 0, ekkor nem lehet invertálni.  $(A)X_{[s]} = \underline{S}^{-1}\underline{A}X_{[e]}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} -5 & -15 & 10 \\ 6 & 30 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 0 & -50 & 35 \\ 12 & 132 & -30 \\ -24 & 36 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 495 \\ -834 \\ -252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,25 \\ 13,9 \\ 4,2 \end{bmatrix}$$

b: Mi lesz az  $\underline{x}_{[s]}$ -ből (A)  $\underline{x}_{[s]}$ -be történő transzformáció mátrixa, ha a kiindulási térben is áttérünk az [s]-re? ( $\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ )

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 5 & -85 \\ -180 & 174 & 102 \\ 0 & 72 & 156 \end{bmatrix}$$

c: Az a, feladat végeredményét megkaphatjuk a  $\underline{S}^{-1}\underline{A}'\underline{x}_{[e]}=(\underline{A})\underline{x}_{[s]}$  képlettel is. ( $\underline{A}'=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ )

6. ( $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ ) Mi a transzformáció mátrixa  $\underline{x}_{[s]}$ -ből (A)  $\underline{x}_{[t]}$ -be?

$$\underline{S}[\underline{e}]=[\underline{s}] \quad \underline{S}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{T}[\underline{e}]=[\underline{t}] \quad \underline{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}[\underline{e}]=(\underline{A})[\underline{e}] \quad \underline{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}'=\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -11 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

7. ( $\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ ) Mi a transzformáció mátrixa  $\underline{x}_{[s]}$ -ből (A)  $\underline{x}_{[s]}$ -be?

$$\underline{S}[\underline{e}]=[\underline{s}] \quad \underline{S}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}[\underline{e}]=(\underline{A})[\underline{e}] \quad \underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{A}'=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 6 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

## Diagonalizálás

Egy mátrix diagonalizálható ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

A  $\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$  jelentősége: Ha a kiindulási és a képtérben egyaránt a sajátvektorok alkotta bázisra térünk át ( $\underline{S}$ ) akkor a transzformáció mátrixa ( $\underline{A}$ ) diagonális lesz ebben a bázisban (a főátlón kívül minden elem 0), és a főátló elemei a megfelelő sajátértékek (feltéve, hogy a sajátvektorok bázist alkotnak).

Ekkor:  $\underline{D}=\text{diag}(\underline{A})=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ , tehát  $\underline{A}=\underline{S}\underline{D}\underline{S}^{-1}$

A sajátvektorok alkotta bázisban könnyen lehet mátrixot hatványozni:

$$\underline{A}^n=\underline{A}\underline{A}\underline{A}\dots=\underline{S}\underline{D}\underline{S}^{-1}\underline{S}\underline{D}\underline{S}^{-1}\underline{S}\underline{D}\underline{S}^{-1}\dots=\underline{S}\underline{D}^n\underline{S}^{-1} \quad (\underline{S}^{-1}\underline{S}=\underline{E})$$

$$\underline{D}^n=\begin{bmatrix} sv_1 & 0 \\ 0 & sv_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sv_1 & 0 \\ 0 & sv_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sv_1 & 0 \\ 0 & sv_2 \end{bmatrix} \dots = \begin{bmatrix} sv_1^n & 0 \\ 0 & sv_2^n \end{bmatrix}$$

$$\text{Számítsuk ki (okosan): } 1. \underline{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}^3$$

$$\text{Sajátértékek meghatározása: } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda_1=4, \lambda_2=-3,$$

$$\lambda_1=4, \begin{bmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 6 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=2/3p, x_2=p \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} p=sv_1, p \in R/\{0\}$$

$$\lambda_2=-3, \begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 6 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad x_1=-1/2q, x_2=q \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} q=sv_2, q \in R/\{0\}$$

$$\text{Ha } p=q=6, \text{ akkor } \underline{S}=[sv_1 \quad sv_2] = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}=\text{diag}(\underline{A})=\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{42} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 18 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 168 & 0 \\ 0 & -126 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\underline{D}^3 = \begin{bmatrix} 4^3 & 0 \\ 0 & (-3)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}^3}} = \underline{\underline{\mathbf{S}\mathbf{D}^3\mathbf{S}^{-1}}}$$

=

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{42} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 256 & 81 \\ 384 & -162 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 1050 & 1092 \\ 3276 & 504 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 78 & 12 \end{bmatrix}$$

(Természetesen  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ -t 3-szor összeszorozva is ezt az eredményt kapjuk.

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 26 \\ 78 & 12 \end{bmatrix} \right)$$

$$2. \underline{\underline{\mathbf{A}^5}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^5$$

$$\text{Sajátértékek meghatározása: } \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda_1=2, \lambda_2=1,$$

$$\lambda_1=2, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1=p, x_2=0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} p = sv_1, p \in R/\{0\}$$

$$\lambda_2=1, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1=-3q, x_2=q \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} q = sv_2, q \in R/\{0\}$$

$$\text{Ha } p=q=1, \text{ akkor } \underline{\underline{\mathbf{S}}} = [sv_1 \quad sv_2] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \text{diag}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{D}^5}} = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 1^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}^5}} = \underline{\underline{\mathbf{S}\mathbf{D}^5\mathbf{S}^{-1}}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 93 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Néhány hasznos weboldal:

[http://digitus.itk.ppke.hu/~b\\_novak/dmat/SAS\\_TAS\\_2009\\_jav.pdf](http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/SAS_TAS_2009_jav.pdf)

<http://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/changebasis/changebasis.pdf>

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/LinAlg/ChangeOfBasis.aspx>

<http://www.ltcconline.net/greenl/courses/203/Vectors/changeOfBasis.htm>

<http://www.math.ucsd.edu/~nslingle/bases.pdf>

<http://demonstrations.wolfram.com/ChangeOfBasisIn2D/>

[digitus.itk.ppke.hu/~b\\_novak/dmat/Diagonalizalas.doc](http://digitus.itk.ppke.hu/~b_novak/dmat/Diagonalizalas.doc)

<http://mathworld.wolfram.com/MatrixDiagonalization.html>

<http://www.sosmath.com/matrix/diagonal/diagonal.html>

<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/LinAlg/Diagonalization.aspx>

[http://www.math.uconn.edu/~troyby/Math2210F09/LT/sec5\\_3.pdf](http://www.math.uconn.edu/~troyby/Math2210F09/LT/sec5_3.pdf)

<http://www.fen.bilkent.edu.tr/~degt/math220/diag.pdf>