

Kettesért kötelező tételek

3. Tétel

Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggő, tetszőleges vektort hozzá téve, továbbra is lineárisan összefüggők maradnak.

Bizonyítás: Tekintsük a nullvektort előállító lineáris kombinációt, ebben legyen $\lambda_j \neq 0$:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Vegyünk hozzá még egy v_{n+1} vektort a lineáris kombinációhoz úgy, hogy $\lambda_{n+1} = 0$, és az összes többi skalár ugyanaz marad:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$. Ebben az új lineáris kombinációban is $\lambda_j \neq 0$, hiszen így választottuk meg a lineáris kombinációt. Mivel teljesül, hogy a nullvektort előállító lineáris kombinációban egyik skalár nem nulla, ezért a vektorok lineárisan összefüggők.

4. Tétel

Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak.

Bizonyítás

Az előző tételt használjuk fel. Indirekt módon tegyük fel, hogy a független rendszerből már elhagyunk egy vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő. Az előző tétel szerint, ha ehhez a rendszerhez hozzá veszünk egy vektort, a rendszer továbbra is lineárisan összefüggő marad. Tehát az eredeti rendszer is lineárisan összefüggő lenne, ami ellentmondás.

5. Tétel

Ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek és egy további, v_{n+1} vektort hozzátételével lineárisan összefüggővé válnak, akkor ezen a v_{n+1} vektor kifejezhető a többi vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás

A $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$ lineáris kombinációban van olyan λ_i , ami nem nulla: $\lambda_i \neq 0$. Azt már láttuk, hogy azok a vektorok, melyekhez tartozó skalár együttható a lineáris kombinációban nem nulla, előállíthatók a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Eszerint csak azt kell bizonyítani, hogy $\lambda_{n+1} \neq 0$. Ha $\lambda_{n+1} = 0$ és $i \leq n$ lenne, akkor a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{n+1} = 0 \text{ lineáris kombinációban ez a nem nulla együttható a szumma jel}$$

utáni λ_i -k egyike lenne, tehát $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$ úgy, hogy pl. $\lambda_k \neq 0$, vagyis az eredeti

vektorok nem triviális lineáris kombinációja előállítaná a nullvektort. Ez azt jelentené, hogy a vektorok lineárisan összefüggők. Ez ellentmondás, tehát az eredeti feltevésünk igaz volt $\lambda_{n+1} \neq 0$.

Ezért, a fentiekben már látott módon v_{n+1} kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjával:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \quad / \quad - \lambda_{n+1} v_{n+1}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0 + \dots + \lambda_n v_n = -\lambda_{n+1} v_{n+1}$$

Mivel $\lambda_{n+1} \neq 0$, van reciproka (szorzásra vonatkozó inverze eleme) $1/\lambda_{n+1}$. A $-1/\lambda_{n+1}$ számszorozását véve a jobb és baloldali vektoroknak:

$$(-\lambda_1/\lambda_{n+1}) v_1 + (-\lambda_2/\lambda_{n+1}) v_2 + \dots + (-\lambda_n/\lambda_{n+1}) v_n = v_{n+1}$$

6. Tétel

A v vektor $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ előállítása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $v_1, v_2, \dots, v_n$ lineárisan független rendszer.

Bizonyítás: Először azt bizonyítjuk, ha a felírás egyértelmű, akkor a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor a definíció közvetlen következménye, hogy van olyan v_j vektor, amely előáll a többi vektor lineáris

kombinációjaként: $v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i v_i$. Ezt a v_j vektort a v vektor előállításába behelyettesítve:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_n v_n = \\ &= (\alpha_1 + \lambda_j) v_1 + (\alpha_2 + \lambda_2) v_2 + \dots + (\alpha_{j-1} + \lambda_{j-1}) v_{j-1} + (\alpha_{j+1} + \lambda_{j+1}) v_{j+1} + \dots + (\alpha_n + \lambda_n) v_n \end{aligned}$$

Az első lineáris kombináció és a második lineáris kombináció együtthatói különböznek, ezért az ellentmondásra jutottunk: a lineáris kombináció nem lenne egyértelmű.

Most azt bizonyítjuk, ha a vektorok függetlenek, akkor a $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ előállítása egyértelmű. Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy a v vektornak két előállítása van:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i. \text{ Rendezzük } 0 \text{ vektorra az egyenletet:}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

Mivel függetlenek, ezért minden skalár nulla: $\alpha_i - \beta_i = 0$, amiből $\alpha_i = \beta_i$.

8. Kicserélési tétel:

Az $f_1, \dots, f_n$ független vektorokból álló rendszer bármely i_j vektorához a $g_1, \dots, g_j$ generátorrendszerből található olyan g_k vektor, amellyel f_j -t kicserélve, az $f_1, \dots, f_{j-1}, g_k, f_{j+1}, \dots, f_n$ vektorokból álló rendszer független.

Bizonyítás

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy pl. f_1 -hez nem lenne egyik g_i sem jó, akkor minden egyes g_i -re: a $g_1, g_2, \dots, g_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Az $f_2, \dots, f_n$ vektorok lineárisan függetlenek voltak, hiszen független rendszerből elhagyva vektort független marad. Hozzájuk véve a g_1 vektort, összefüggővé váltak. Ezért a 6.2-beli tétel értelmében a g_1 vektor az $f_2, \dots, f_n$ vektorokkal kifejezhető:

$$g_1 = \sum_{k=2}^n \gamma_{1k} f_k$$

Az indirekt feltevés szerint ha g_1 helyett bármelyik más g_i vektort veszünk a generátorrendszerből, a fenti okfejtés ugyanúgy elmondható, tehát a generátorrendszer minden g_i vektora felírható az f vektorok lineáris kombinációjaként:

$$g_i = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} f_k$$

Ugyanakkor, mivel a $\mathbf{g}_i$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ezért a tér minden vektora, így $\mathbf{f}_1$ is felírható

lineáris kombinációjuként. A $\mathbf{g}_i$ vektorokba behelyettesítve azok $\mathbf{f}_k$ vektorokkal kifejezett alakját:

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{k=1}^j \phi_{ik} \mathbf{g}_k = \sum_{k=1}^j \phi_{ik} \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} \mathbf{f}_l$$

Az $\mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineáris kombinációja előállítja az $\mathbf{f}_1$ vektort. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők lennének. Ez ellentmondás.

Következmény

A generátorrendszerben lévő vektorok száma legalább annyi, ahány vektor valamely független rendszerben van.

Bizonyítás

A független rendszer vektorait különböző generátorrendszerbeli vektorokra lehet csak kicserélni, különben összefüggő rendszert kapnánk. Ezért legalább annyi vektort tartalmaz, mint bármely független rendszer.

Tétel

Bármely vektortérben a bázisok elemszáma egyenlő.

Bizonyítás

Bizonyítás: A bázis független vektorokból álló generátorrendszer, ezért, kétféleképpen tekinthetjük.

Legyen a vektortér két bázisa, $\{\mathbf{b}\}$ és $\{\mathbf{c}\}$, melyek rendre n_b ill. n_c számú vektort tartalmaznak. Tekintsük a $\{\mathbf{b}\}$ -t független rendszernek, a $\{\mathbf{c}\}$ -t pedig generátorrendszernek. Ekkor $n_b \leq n_c$. De fordítva is értelmezhetjük volna a bázisok szerepét, akkor pedig: $n_c \leq n_b$. Ez csak úgy lehetséges, ha $n_b = n_c$.

9. Tétel:

Adott a tér egy ortonormált bázisa, és az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok e bázisra vonatkoztatott koordinátákkal:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3)^T \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3)^T \end{aligned}$$

Az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzat a következőképpen számolható ki:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$$

Bizonyítás

Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: i, j, k . Alkalmazva a skalárszorzat homogén és lineáris tulajdonságait, és azt, hogy $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$, továbbá $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$ kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 i \cdot b_1 i + a_1 i \cdot b_2 j + a_1 i \cdot b_3 k + a_2 j \cdot b_1 i + a_2 j \cdot b_2 j + a_2 j \cdot b_3 k + a_3 k \cdot b_1 i \\ &\quad + a_3 k \cdot b_2 j + a_3 k \cdot b_3 k = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{aligned}$$

10. Tétel

Adott a tér egy ortonormált, jobbrészes bázisa, és az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok az e bázisra vonatkoztatott koordinátáikkal:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3)^T \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3)^T \end{aligned}$$

Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat ekkor a következőképpen számolható ki:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Bizonyítás

Jelöljük a bázisvektorokat a szokásos módon: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Alkalmazva a vektoriális szorzat disztributív, anitkommutatív tulajdonságait, és azt hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy (tk. 70. old):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \dots = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$$

11. Tétel:

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ adottak, akkor $\mathbf{a}$ három vektor vegyes szorzata kiszámítható a következő módon:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Biz. 72. old

12. A skalárszorzat geometriai jelentése

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $\mathbf{e}$ -vel jelölt egyik vektor egységvektor:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \alpha = x$$

amely az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ -re vett előjeles merőleges vetületének előjeles hossza (negatív, ha $\alpha > 90^\circ$)

Ha az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$ skalárszorzatot szeretnénk megszerkeszteni, akkor legyen az $\mathbf{e}$ egységvektor $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos, ekkor az x vetület $|\mathbf{b}|$ -szeresét kell megszerkeszteni:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (|\mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}) = |\mathbf{a}| \cdot (|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}|) \cdot \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha = x \cdot |\mathbf{b}|$$

13. Vektoriális szorzat geometriai jelentése

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma magassága m , amelyre

$$m = |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$

A paralelogramma egyik alapja: $|\mathbf{a}|$. Ezért a vektoriális szorzat geometriai jelentése az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha = \text{terület} = (\text{alap} \cdot \text{magasság})$$

14. A vegyesszorzat geometriai jelentése

Tekintsük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedont. A paralelepipedon alapja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma. Az $\mathbf{e}$ vektor legyen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel párhuzamos egységvektor, tehát merőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjára.

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|) \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} \\ &= \text{előjeles térfogat} \end{aligned}$$

Az előjel attól függően + vagy -, hogy a $\mathbf{c}$ vektor ugyanabba a térfélbe mutat-e, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának geometriai jelentése a vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.

15. Definíció

Ha $\mathbf{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor az $\mathbf{n}$ az S sík normálvektora. Egy síknak tehát végtelen sok normálvektora van.

Tétel

Ha az S sík egy normálvektora n , egy adott pontja P_0 , ebbe mutató helyvektor p_0 , tetszőleges pontja P , ebbe mutató helyvektor p , akkor a sík egyenlete:

$$n(p - p_0) = 0$$

Bizonyítás

Ha n merőleges a síkra, merőleges annak minden vektorára, így a P_0P vektorra is, ezért skalárszorzatuk 0.

16.a Tétel

Két vektor skalárszorzata akkor és csak akkor 0, ha a vektorok merőlegese. Képlettel:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

16.b Tétel:

Az a és b vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor nullvektor, ha a vektorok párhuzamosak.

Bizonyítás:

Először azt bizonyítjuk, ha a párhuzamos b akkor $a \times b = 0$. Ha két vektor egymással párhuzamos, akkor a bezárt szög 0, vagy π , így $\sin(a, b) = 0$, tehát $a \times b = 0$.

Másodszor azt bizonyítjuk, ha $a \times b = 0$, akkor a párhuzamos b -vel. Az $a \times b = |a| \cdot |b| \cdot \sin(a, b) \cdot e$ szorzat akkor és csak akkor nulla, ha vagy $\sin(a, b) = 0$ vagy egyik vektor nullvektor. Ha $\sin(a, b) = 0$, akkor a bezárt szög 0 vagy π . Ekkor a két vektor párhuzamos. A másik eset, hogy a vagy b , legalább az egyike nullvektor. A nullvektor iránya tetszőleges, így a párhuzamosság fennáll.

17-18. Magtér és képtér alteret alkot

A következő tétel biztosítja, hogy a magtér elnevezés helyes, a magtérbeli vektorok maguk is vektorteret alkotnak.

Tétel: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés R felett. $\text{Ker}(L)$ altere V -nek.

Bizonyítás: Legyenek u és v magtér vektorai, vagyis $L(u) = L(v) = 0 \in W$.

$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0$, vagyis összegük is magtérbeli vektor.

$L(\lambda u) = \lambda L(u) = \lambda 0 = 0$, tehát magtérbeli vektor számszorosa is magtérbeli. az összeadásra és a számszorosa vonatkozó zárttság biztosítja, hogy a magtér altere V -nek.

Tétel: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés R felett. Bizonyítsa be, hogy $\text{Im}(L)$ altere W -nek.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy a lineáris leképezésnek, mint függvénynek az értékkészlete is vektortér, a W -beli $+$ -ra és az R -beli számszorosra nézve.

19. Sajátvektorok alteret alkotnak

Tétel: Az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektor és a $\mathbf{0}$ vektor alteret alkotnak.

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{s}_1$ és $\mathbf{s}_2$ az L lineáris transzformáció ugyanazon λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorai. A már tanult tétel szerint; ha az összegükről, és a számszorosukról be tudjuk látni, hogy azok szintén λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor e vektorok összessége alteret alkot:

$$L(\mathbf{s}_1) = \lambda \mathbf{s}_1, L(\mathbf{s}_2) = \lambda \mathbf{s}_2$$

Összegük is sajátvektor, ugyanis: $L(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = L(\mathbf{s}_1) + L(\mathbf{s}_2) = \lambda \mathbf{s}_1 + \lambda \mathbf{s}_2 = \lambda(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$

A számszoros is sajátvektor: $L(\mu \mathbf{s}_1) = \mu L(\mathbf{s}_1) = \mu \lambda \mathbf{s}_1 = \lambda(\mu \mathbf{s}_1)$

21. Determináns tulajdonságai

1. Ha a determináns valamely sorát λ -val szorozzuk, a determináns az eredeti λ -szorosa lesz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det(A)$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon a_k sor szerint, amelyet beszoroztunk λ -val.

$$\det B = \sum_{j=1}^n \lambda \cdot a_{kj} \cdot D_{kj} = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{kj} \cdot D_{kj} = \lambda \cdot \det A.$$

2. Ha a determináns i -edik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első i -edik sorában az összeg első tagjai, a második determináns i -edik sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan. (Mivel az összeadás kommutatív művelet, tulajdonképpen nem fontos, hogy rendre az első, ill. a második tagokat tegyük e determinánsokba, csak az a lényeg, hogy az összeg egyik tagját az elsőbe, másikat a másodikba tegyük)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben az összeg szerepel.

$$\det A = \sum_{j=1}^n (b_{ij} + c_{ij}) \cdot D_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot D_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} D_{ij}.$$

3. Ha egy determináns egy sora csupa 0 elemet tartalmaz, akkor a determináns 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst a csupa 0 elemet tartalmazó sor szerint:

$$\det A = \sum_{j=1}^n 0 \cdot D_{ij} = 0.$$

4. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1) -szeresére változik.

Bizonyítás: Először két szomszédos sor cseréjére igazoljuk az állítást. Két tetszőleges sor cseréjét a szomszédos sorok cseréjével képzeljük el. Cseréljük fel a determináns i . és $(i+1)$. sorát. Az eredeti, és a két sor cseréje után kapott determinánsokat jelöljük D_1 , és D_2 -vel.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az első determinánst az i . sora szerint, míg a másodikat az $(i+1)$. sora szerint kifejtve a következőt kapjuk:

$$D_1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} \quad \text{és} \quad D_2 = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1) \cdot D_{ij}$$

$$\text{Ebből } D_1 = -D_2$$

Ha két tetszőleges sort cserélünk fel, akkor van közöttük valahány sor, legyen ezek száma k . Az alul lévő sort k szomszédos sor cseréjével tudjuk a másik sor alá vinni, ekkor szomszédosak. Ebben a pozícióban felcserélve őket, most az eredetileg felül lévő sor kerül alulra. Ezzel együtt eddig $k+1$ szomszédos csere történt. Ebből a pozícióból, amikor az eredetileg felül lévő sor helyén már a másik sor áll, és alatta pedig ő maga, megint k db szomszédos sor cserével tudjuk az eredetileg felül lévő sort az eredetileg alul lévő helyére mozgatni. Összesen $k+1+k=2k+1$ db szomszédos csere történt, ennyiszor változott (-1) -szeresére a determináns előjele, tehát $(-1)^{2k+1} = -1$ -szerese lett az eredetinek.

5. Ha egy determináns két sora megegyezik, a determináns értéke 0.

Bizonyítás: Cseréljük fel a determinánsban a két egyenlő sort. Ekkor a determináns értéke (-1) -szeresére változik az előző tétel értelmében. Másrészt nem változik, hiszen a két determináns elemei megegyeznek. Ha tehát D a determináns értéke, akkor $D = (-D)$, amiből $D = 0$.

6. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor λ -szorosát, a determináns értéke nem változik.

Bizonyítás: Az eredeti és az új determinánst D és D_λ -val jelölve:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda \cdot a_{j1} & a_{i2} + \lambda \cdot a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda \cdot a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_0$$

7. Egy alsó (vagy felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint, majd a keletkező $(n-1)$ -edrendű aldeterminánst szintén az első sora szerint, és így tovább:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

8. Ferde kifejtés tétele: Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény 0.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{kj} = 0 \quad i \neq k$$

Bizonyítás: Ezt a tételt 3×3 -as determinánsokra bizonyítjuk. Szorozzuk meg az 1. sor elemeit a 2. sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ha az egyenlőtlenség jelétől jobbra álló, ún. ferde kifejtést nézzük, olyan, mintha a determináns első sora szerint fejtettük volna ki, és az első sorban a második sor elemei állnának. Ha ezen jobboldal

szerint rekonstruálnánk a determinánst, annak első és második sor egyenlő lenne, tehát értéke 0. A tétel állítását $n \times n$ -es determinánsra is így módon lehet bizonyítani.

23. Homogén lineáris leképezés mátrixa

Definíció: Az $L : V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa $A_{[[a][b]]} = [k_1 | k_2 | \dots | k_n]$, ahol $k_i \stackrel{\text{def}}{=} L(a_i)$ az A mátrix oszlopai a V^n -beli $[a]$ bázis a_i vektorainak képei, a W^k -beli $[b]$ bázisra vonatkozóan. Transzformáció esetén nem írjuk ki a bázis nevét kétszer $A_{[a]}$.