

Sajátérték, sajátvektor:

Transzformáció: $L: V \rightarrow V$ lineáris leképezés

E részben csak transzformációkról lesz szó.

Definíció:

A λ szám sajátértéke az L transzformációnak, ha van olyan NEM NULLA vektor, amelyre

$$L(x) = \lambda x.$$

Ez a nem nulla x vektor az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora.

Példa: A transzformációt a mátrixával adjuk meg, legyen az A .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ha } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ akkor } Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3x.$$

Igy $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

$$\text{Ha } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ akkor } Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2x$$

Vagyis $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Hogyan lehet kiszámítani a sajátvektort?

Egyszerűbb transzformációk esetében a geometriai

tulajdonságokból számolás nélkül is megkapható: pl. egyenesre

való tükrözésnél minden, a tengelyre eső vektor sajátvektor,

hiszen a képe önmaga. A kép egyszerese az eredeti vektornak,

ezért egyik sajátérték 1 (ehhez tartozó sajátvektorok alteret

alkotnak, a tengely egyenesét). A tengelyre merőleges egyenes minden vektora is sajátvektor, képe önmaga ellentettje, ezért a sajátérték -1 (az ehhez tartozó alter a tengelyre merőleges egyenes).

Ha a transzformációt a mátrixával adjuk meg, akkor a sajátértékek és sajátvektorok a mátrixból számolhatók.

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

TFH., $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sajátvektor:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda x = (\lambda E)x \Leftrightarrow (\lambda E)x - Ax = (\lambda E - A)x = 0.$$

Tehát $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ a nemtriviális megoldása a $(\lambda I - A)x = 0$. $\Leftrightarrow \lambda E - A$ hom. lin.

egy.rsz.-nek. $\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0$ „

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{vagy} \quad \lambda = 3.$$

1. Ha $\lambda = 2$,

$$Ax = 2x = 2Ix \Leftrightarrow 2Ix - Ax = (2I - A)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \neq 0, t \in R.$$

2. Ha $\lambda = 3$,

$$Ax = 3x = 3Ex \Leftrightarrow 3Ex - Ax = (3E - A)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad r \neq 0, r \in R.$$

Karakterisztikus polinom:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix},$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$A_{n \times n} = [a_{ij}]$$

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = 0,$$

Karakterisztikus mátrix: :

$$\lambda E - A$$

Sajátvektor megkeresése:

1. Megoldjuk a karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek, λ_i
2. Visszahelyettesítve a karakterisztikus egyenletbe az egyik sajátértéket, megoldjuk a

$$(\lambda_i E - A)\vec{x} = 0 \quad \text{vagy} \quad (A - \lambda_i E)\vec{x} = 0, \quad i=1,2,\dots \text{ egyenletrendszer.} A$$

nemtriviális megoldások adják a λ_i -hez tartozó sajátvektorokat.

Példák (a leképezést a mátrixával adjuk meg):

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ -4 & \lambda-5 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 (\lambda-10) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, 1, \text{ és } 10.$$

$$1. \quad \lambda = 1,$$

$$(1 \cdot E - A)\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 2t \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. $\lambda = 10$,

$$(10 \cdot E - A) \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2r, \quad x_2 = 2r, \quad x_3 = r \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r \\ 2r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Példa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$f(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 6) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1, 1$, és 6 .

1. $\lambda = 1$,

$$(1 \cdot E - A) \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in R.$$

2. $\lambda = 6$,

$$(A - 6 \cdot I)x = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, r \in R.$$

A fenti példákban legalább két lineárisan független sajátvektora volt a 3 dimenziós tér transzformációjának.