

## Lineáris leképezések

A lineáris leképezés olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete vektortér, és a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

Legyen ez a függvény  $L: V \rightarrow W$   $u, v \in V, k \in R$ ,

(a)  $L(u + v) = L(u) + L(v)$ .

(b)  $L(ku) = kL(u)$ .

Ha  $V=W$ , akkor a leképezést **lineáris transzformációnak** hívjuk.

Az  $L(u)$  vektor az  $u$  vektor **képe**. (Az  $L(u)$  vektor **őse** az  $u$  vektor)

**Példák:**

1. Vetítés:  $L : R^3 \rightarrow R^2$

$$L \left( \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} .$$

$L$  lineáris leképezés:

$$(a) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$L(u+v) = L \left( \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = L \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) + L \left( \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = L(u) + L(v) .$$

(b)  $k \in R$ ,

$$L(ku) = L \left( \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = kL \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = kL(u) .$$

2. Nyújtás:  $L_1 : R^3 \rightarrow R^3$

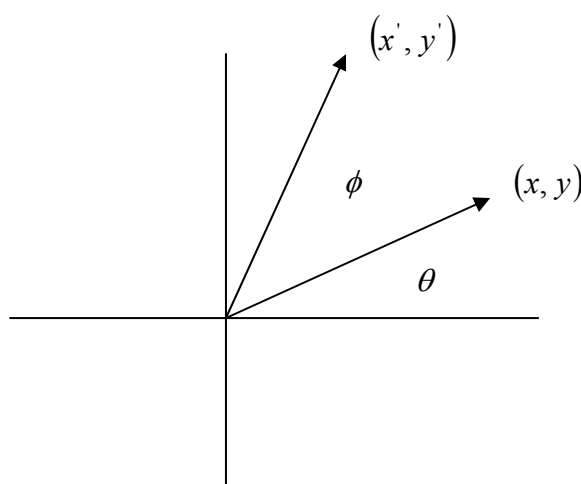
$$L_1(u) = L_1 \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, \quad r > 1 .$$

Zsugorítás:  $L_2 : R^3 \rightarrow R^3$

$$L_2(u) = L_2\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, \quad 0 < r < 1$$

$\Rightarrow L_1$  és  $L_2$  **lineáris transzformációk.**

3. Forgatások:



$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad r = \|u\|. \quad x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x' &= r \cos(\theta + \phi) = r \cos(\theta) \cos(\phi) - r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ y' &= r \sin(\theta + \phi) = r \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x' &= x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ y' &= x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$L: R^2 \rightarrow R^2$$

$$L(u) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

$L$  is **lineáris transzformáció**

4. A legyen  $m \times n$  mátrix.

$$L: R^n \rightarrow R^m$$

$$L(u) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = Au$$

is lineáris transzformáció

(a)  $u, v \in R^n$ ,

$$L(u+v) = A(u+v) = Au + Av = L(u) + L(v).$$

(b)  $k \in R$ ,

$$L(ku) = A(ku) = k(Au) = kL(u).$$

Példa: (vetítés)

$$L: P_2 \rightarrow P_1, L(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 + a_1)x + a_0,$$

$P_n$  az összes polinom, melynek foka  $\leq n$ . Bizonyítsa be, hogy  $L$  lineáris leképezés!

(a)  $u = a_2x^2 + a_1x + a_0, v = b_2x^2 + b_1x + b_0$  legyenek  $P_2$ -beli polinomok

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)) \\ &= [(a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)]x + (a_0 + b_0) \\ &= [(a_2 + a_1)x + a_0] + [(b_2 + b_1)x + b_0] \\ &= L(a_2x^2 + a_1x + a_0) + L(b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= L(u) + L(v) \end{aligned}$$

(b)  $k \in R$ ,

$$\begin{aligned} L(ku) &= L(k(a_2x^2 + a_1x + a_0)) = L(ka_2x^2 + ka_1x + ka_0) \\ &= (ka_2 + ka_1)x + ka_0 = k[(a_2 + a_1)x + a_0] \\ &= kL(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= kL(u) \end{aligned}$$

**Példa:**

$L: P_n \rightarrow P_n$ ,  $L$  a deriválás,

$$L(x^2) = 2x.$$

$L$  lineáris leképezés-e?

$$(a) \quad u = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, v = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in P_n,$$

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L((a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)) \\ &= n(a_n + b_n)x^{n-1} + (n-1)(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-2} + \dots + (a_1 + b_1) \\ &= [na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1] + [nb_n x^{n-1} + (n-1)b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1] \\ &= L(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) + L(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) \\ &= L(u) + L(v) \end{aligned}$$

$$(b) \quad k \in R,$$

$$\begin{aligned} L(ku) &= L(ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \dots + ka_0) \\ &= nka_n x^{n-1} + (n-1)ka_{n-1} x^{n-2} + \dots + ka_1 \\ &= k[na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1] \\ &= kL(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \\ &= kL(u) \end{aligned}$$

**Példa:**

$$L : R^3 \rightarrow R^2$$

$$L \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Igaz-e., hogy L lineáris leképezés?

NEM, mert

$$(a) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$L(u+v) = L \left( \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} u_1 u_2 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = L \left( \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) + L \left( \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = L(u) + L(v)$$

**Fontos:**

$$L: V \rightarrow W$$

- $L(0_V) = 0_W$ ,  $0_V$  a vektor összeadás egységeleme  $V$ -ben, másképpem nullelem  $V$ -ben, és  $0_W$  a vektor összeadás egységeleme, a nullelem  $W$ -ben.

- $L(u - v) = L(u) - L(v)$ .

- A lineáris kombináció megőrződik:  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

$c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  esetén:

$$L(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k) = c_1 L(v_1) + c_2 L(v_2) + \dots + c_k L(v_k).$$

- Ha  $V$   $n$ -dimenziós vektortér  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$   $V$  egy bázisa. Minden  $u \in V$ , akkor  $L(u)$  a lineáris kombinációja a bázisvektorok képeinek:  $L(w_1), L(w_2), \dots, L(w_n)$  (azonban e képvektortok nem biztos, hogy bázist alkotnak!).



## Egy-egyértelmű leképezések, magtér (Kernel) és képtér (Range, Image)

**Definíció:** Egy-egyértelmű leképezés (kölcsonösen egyértelmű, bijekció)

$L: V \rightarrow W$  minden  $v_1, v_2 \in V$ , ha  $v_1 \neq v_2$  akkor  $L(v_1) \neq L(v_2)$  (vagy, ami ezzel ekvivalens:  $L(v_1) = L(v_2)$  -ből következik  $v_1 = v_2$ ).

**Példa:**

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}. \quad \text{Döntse el, hogy } L \text{ bijekció-e?}$$

Megoldás:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = v_2.$$

Tehát a leképezés bijekció (egy-egy értelmű).

**Magtér:**

**Az**  $L: V \rightarrow W$  **lineáris leképezés magtere,**  $\ker(L)$ , **a**  $V$  **azon részhalmaza, amelynek minden**  $v$  **vektora a**  $W$  **nullelemére képződik**  $L(v) = 0$ .

**Példa:**

$$L(u) = L \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = Au = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

$$\ker(L) = ?$$

**Megoldás:**

$\ker(L)$  azon  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$  vektorok összessége, amelyre:

$$L(u) = Au = 0.$$

Tehát  $\ker(L)$  az  $Au = 0$  homogén lineáris egyenletrendszer megoldása.

**Az elnevezés helyes,  $\ker(L)$  valóban altér:**

**Biz.:**

$v_1, v_2 \in \ker(L)$ ,  $L(v_1) = L(v_2) = 0$ . Alkalmazzuk a tanult tételt, miszerint akkor altér valamely részhalmaz, ha mind a vektorok összeadására (+), mind a skalárral való szorzásra nézve zárt (és fordítva):

1.  $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in \ker(L)$ .
2.  $L(kv_1) = kL(v_1) = k0 = 0, k \in R \Rightarrow kv_1 \in \ker(L)$ .

**Mikor bijekció valamely leképezés?**

**Tétel:**

A  $L: V \rightarrow W$  lineáris leképezés akkor és csak akkor egy-egyértelmű, ha  $\ker(L) = \{0\}$

Bizonyítás:

$\Rightarrow$  HA  $L$  bijekció, akkor  $L(0) = 0$ -ből következik, hogy az egyetlen vektor  $V$ -ben, aminek képe a  $0$   $W$ -ben a  $0$   $v$ -ben:  
 $L(0) = 0$ .

$\Leftrightarrow \text{Ha } \ker(L) = \{0\}$ : Tf., hogy van két olyan vektor,  $u$  és  $v$ , amelyek képe nem különbözik:

$$L(u) = L(v).$$

Akkor:  $L(u - v) = L(u) - L(v) = 0$  vagyis  $e$  vektorok különbsége benne van a magtérben  $\ker(L) = \{0\}$ ,

$u - v = 0 \Rightarrow u = v$  - a két vektor egyenlő

### **Megjegyzések (praktikusak):**

HA  $L: R^n \rightarrow R^n$  lin. Leképezést a mátrix-szorzás segítségével definiáljuk:  $L(x) = Ax$ , akkor a következők ekvivalensek:

- $\ker(L) = \{0\}$ .
- $Ax = 0$  -nek csak a triviális megoldása van.
- $Ax = b$  -nek minden  $b$  -re egyértelmű megoldása van.
- $L(x) = Ax$  bijekció

**Képtér:**

$L: V \rightarrow W$ , ezen  $L$  leképezés **képtere** a  $W$  azon részhalmaza,

$\text{Im}(L)$ , amelyek valamely  $V$ -beli vektor képei:

$w \in \text{Im}(L)$ , ha létezik  $v \in V$  hogy  $L(v) = w$

Ha a képtér azonos  $W$ -vel, vagyis  $\text{Im}(L) = W$ , akkor a leképezést *ráképezésnek* nevezzük.

**Az elnevezés, képtér, helyes, a halmaz valóban altér:**

$L:V \rightarrow W$ ,  $Im(L)$  altér  $W$ -nek.

**Bizonyítás:**

$L(0)=0$ ,  $0 \in Im(L)$ , a képtér sosem üres. Minden  $w_1, w_2 \in Im(L)$ , található olyan  $v_1, v_2 \in V$  hogy:  
 $L(v_1)=w_1$ ,  $L(v_2)=w_2$ .

1.  $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$  így  $w_1 + w_2 \in Im(L)$

hiszen  $v_1 + v_2 \in V$ .

2.  $L(kv_1) = kL(v_1) = kw_1, k \in R$ . Emmiatt  $kw_1 \in Im(L)$

hiszen  $kv_1 \in V$