

## DETERMINÁNSOK

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

**Definíció:** az n sorba és m oszlopba elrendezett n x m (valós vagy képzetes) számokat tartalmazó táblázatot mátrixnak nevezzük.

**Definíció (ld. Freud R.: Lineáris algebra):** Az n x n-es mátrixhoz számot rendelhetünk. Ha a hozzárendelt szám az alábbiakban ismertett szabály szerint történik, akkor ezt a számot az n x n-es mátrix determinánsának nevezzük. Ezt a számot a következőképpen képezzük: a mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet választunk, és ezeket összeszorozzuk. Ezt minden lehetséges módon elvégezzük, így n! db szorzatot kapunk. E szorzatokat + vagy – előjellel látjuk el aszerint, hogy a sorindexek természetes sorrendjét követő felírásban az oszlopindexek permutációja páros, vagy páratlan. Az előjellel ellátott szorzatokat összegezve kapjuk a determináns értékét. Képletben:

$$\det(\mathbf{A}) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$\mathbf{A}$  jelenti az n x n-es mátrixot,  $\det(\mathbf{A})$  a hozzárendelt számot,  $I(\sigma)$  jelenti a  $\sigma$  permutációban szereplő inverziók számát,  $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n)$  az 1, 2, 3, ..., n számok egy permutációját.

Például:  $\sigma: 1, 3, 2, 5, 4, 6; \quad \sigma(1)=1, \sigma(2)=3, \sigma(3)=2, \sigma(4)=5, \sigma(5)=4, \sigma(6)=6$

**Az alábbi bizonyításoknál feltesszük, hogy a determináns elemei valós számok.**

**Megjegyzések:**

- a.) Szokás a determináns értékéről beszélni. Ekkor magát a hozzárendelést értjük a determináns szó alatt, és mint a függvénynek is van függvényértéke, úgy a determinánsnak is beszélhetünk (függvény)értékéről.
- b.) Egy permutáció páros/páratlan, ha az inverziók száma páros/páratlan.
- c.) **Lemma:** Két elem cseréjével a permutációk száma párosról páratlanra, páratlanról párosra változik.

**Biz.:** Szomszédos elemek cseréjekor ez nyilvánvaló. Két tetszőleges elem,  $x, y$  cseréjekor, ha  $k$  elem állt köztük,  $k$  db szomszédos elem cserével  $y$  az  $x$  jobboldali szomszédja, 1 db cserével  $y$  az  $x$  helyére kerül, majd az  $x$   $k$  db szomszédos elem cserével  $y$  helyére vihető. Ez összesen  $2k+1$  db szomszédos elem cseréje. Mivel minden alkalommal a páros permutációból páratlan, a páratlanból páros keletkezik, ezért az eredményül kapott sorrendben a permutáció paritása megváltozik.

**Lemma:**

$$\sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum (-1)^{I(\sigma') + I(\pi)} a_{\sigma'(1)\pi(1)} a_{\sigma'(2)\pi(2)} a_{\sigma'(3)\pi(3)} \dots a_{\sigma'(n)\pi(n)}$$

**Bizonyítás:**

Az első sorrendből elemcserékkel bármilyen más sorrend előállítható. Így a tényezők ugyanazok. Mivel két elem cseréjével mindkét indexben az inverziók száma páratlan számmal változik, az  $I(\sigma') + I(\pi)$  szám paritása ugyanaz, mint az  $I(\sigma)$  számé, így az előjel is ugyanaz lesz. Tehát a determináns e második, sorok oszlopok szempontjából szimmetrikus formulával is definiálható.

**A determináns tulajdonságai**

1. A determináns értéke nem változik, ha a főátlóra tükrözzük az elemeit.

**Következmény:** A sorokra kimondott tételek oszlopokra is igazak.

2. Ha a determináns főátlója fölött (alatt) csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.

3. Ha a determináns egy sora (egy sorának minden eleme) 0, akkor értéke is 0.

4. Ha a determináns egy sorát egy valós számmal megszorozzuk, értéke is e számszoros lesz.

5. Ha a determináns két sorát felcseréljük, az értéke  $(-1)$ -szeresére változik.

6. Ha a determináns két sora egyenlő, akkor a determináns értéke 0.

7. Ha a determináns  $k$ . sora kéttagú összegekből áll, akkor a determinánst két determináns összegeként kaphatjuk. Az egyik determináns  $k$ . sora az eredeti  $k$ . sorában álló összegekből az első tagokat, a másik az eredeti determináns  $k$ . sorában álló összegekből a második tagokat tartalmazza.

8. A determináns értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk valamely másik sor számszorosát.

**9. Kifejtési tétel:**

A determináns értékét kapjuk, ha valamely sorának elemeit megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezt a determináns a *i. sor szerinti kifejtésének* nevezzük.

Az  $a_{ik}$  elemhez tartozó  $A_{ik}$  *minormátrix* az eredeti  $A$  mátrix  $i$ . sorának és  $k$ . oszlopának elhagyásával keletkezik. Az  $A_{ik}$  minormátrixhoz tartozó determinánst az  $a_{ik}$  elem *aldeterminánsának* nevezzük. Ezt előjellel látjuk el,  $(-1)^{i+k}$ . Az aldetermináns jele  $D_{ik}$ .

**A kifejtési tétel képletben:**

Az  $i$ . sor szerinti kifejtés: 
$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$$

A  $k$ . oszlop szerinti kifejtés hasonlóan: 
$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{i=1}^n a_{ik} D_{ik}$$
 Tehát  $D_{ik} = (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$ .

**10. Ferde kifejtés**

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{jk}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{jk}$$

A determináns tulajdonságai

1. A determináns értéke nem változik, ha a főátlóra tükrözzük az elemeit.

**Következmény:** A sorokra kimondott tételek oszlopokra is igazak.

Bizonyítás:

$$\det(A) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

A főátlóra tükrözött mátrix determinánása:

$$\det(A^*) := \sum (-1)^{I(\sigma)+I(\pi)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum (-1)^{I(\sigma)+I(\pi)} a_{\sigma(1)\pi(1)} a_{\sigma(2)\pi(2)} a_{\sigma(3)\pi(3)} \cdots a_{\sigma(n)\pi(n)}$$

Miben különböznek a szorzatok? Csak az indexek változtak, de az egyes tényezők értékei változatlanok! A determináns sor/oszopra szimmetrikus definíciójából az előjelek azonossága adódik.

2. Ha a determináns főátlója fölött (alatt) csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.

**Bizonyítás:** minden sorból és oszlopból kell mindegyik szorzatban szerepelnie egy-egy elemnek. Csak akkor lesz a szorzat 0-tól különböző, ha az első sorból az első elemet választjuk. De akkor a második sorból csak  $a_{22}$  választható (ha nem ezt az elemet választjuk a szorzat 0), és így tovább:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

2. Ha a determináns egy sora (egy sorának minden eleme) 0, akkor értéke is 0.

**Bizonyítás:**

Tfh. hogy a k. sor minden eleme 0. Az alábbi definícióban mely elem lesz 0?

$$\det(A) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

3. Ha a determináns egy sorát egy valós számmal megszorozzuk, értéke is e számszoros lesz.

**Bizonyítás:**

Tfh. hogy a  $k$ . sort szorozzuk a  $\lambda$  valós számmal. Ekkor

$$\det(A) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \text{ és a beszorzott sorral}$$

$$\det(A_\lambda) = \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (\lambda a_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \left( \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) = \lambda \det(A)$$

**Megjegyzés:** Az előző tétel ennek speciális esete  $\lambda=0$ -ra.

**4. Ha a determináns két sorát felcseréljük, az értéke  $(-1)$ -szeresére változik.**

**Bizonyítás:**

$$\det(A) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Cseréljük fel az  $i$ . sort a  $k$ . sorral:

$$\det(A') := \sum (-1)^{I(\sigma')} a_{1\sigma'(1)} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{k\sigma'(k)} \cdots a_{i\sigma'(i)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

A tagok ugyanazok, de a szorzatokban a sorindexek szerinti elrendezésben az oszlopok  $\sigma$  permutációja  $\sigma'$  lett.

Mi a különbség  $\sigma$  és  $\sigma'$  között?

Két elem cseréjével miként változik az inverziók száma?

Az azonos szorzatok előjeléről mit tudunk tehát?

**Mi a különbség  $\sigma$  és  $\sigma'$  között?**

Minden szorzatban az  $i$ . és a  $k$ . tényező felcserélődött. Ezért az oszlopindexek sorrendjében is e két elem fel van cserélve.

**Két elem cseréjével miként változik az inverziók száma?**

Páros számúról páratlan számúra, illetve páratlan számúról páros számúra változik az inverziók száma.

**Az azonos szorzatok előjeléről mit tudunk tehát?**

A szorzatok előjelét az inverziók száma határozza meg, a páros permutációkat  $+$  a páratlanokat  $-$  előjellel vesszük. Ezek szerint tehát minden egyes szorzat előjele  $(-1)$ -szeresére változik, de a szorzat abszolút értéke változatlan marad, hiszen két tényező felcserélése a szorzat értékét nem változtatja meg. Ez azt jelenti, hogy a determináns értéke  $(-1)$ -szeresére változik.

6. Ha a determináns két sora egyenlő, akkor a determináns értéke 0.

**Bizonyítás:**

Legyen  $\det(A)=D$ . Cseréljük fel az  $A$  mátrix két egyenlő sorát. Változik-e az  $A$  mátrix?

Változhat-e a hozzá tartozó determináns értéke? De az előző tétel miatt a sorcserével  $(-1)$  – szeresére kell a determináns értékének változnia, vagyis  $D = -D$ . Hogyan lehetséges ez?

**Változik-e az  $A$  mátrix?**

Nem, hiszen azonos sorokat cseréltünk.

**Változhat-e a hozzá tartozó determináns értéke?**

Nem, mert elemei nem változtak.

**De az előző tétel miatt a sorcserével  $(-1)$  – szeresére kell a determináns értékének változnia, vagyis  $D = -D$ . Hogyan lehetséges ez?**

Csakis úgy, hogy a determináns értéke 0.



7. Ha a determináns  $k$ . sora kéttagú összegekből áll, akkor a determinánst két determináns összegeként kaphatjuk. Az egyik determináns  $k$ . sora az eredeti  $k$ . sorában álló összegekből az első tagokat, a másik az eredeti determináns  $k$ . sorában álló összegekből a második tagokat tartalmazza.

**Bizonyítás:**

Legyen a  $k$ . sor az, amelyik a kéttagú összeget tartalmazza. az összegzés tulajdonságai miatt:

$$\det(A) = \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (b_{k\sigma(k)} + c_{k\sigma(k)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots b_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots c_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. A determináns értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk valamely másik sor számszorosát.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l1} + \lambda a_{k1} & a_{l2} + \lambda a_{k2} & \dots & a_{ln} + \lambda a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) + 0$$

**9. Kifejtési tétel:** a determináns értékét kapjuk, ha valamely sorának elemeit megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles al-determinánsokkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezt a determináns *a i. sor szerinti kifejtésének* nevezzük.

Az  $a_{ik}$  elemhez tartozó  $A_{ik}$  *minormátrix* az eredeti  $A$  mátrix  $i$ . sorának és  $k$ . oszlopának elhagyásával keletkezik. Az  $A_{ik}$  minormátrixhoz tartozó determinánst az  $a_{ik}$  elem *al-determinánsának* nevezzük. Ezt előjellel látjuk el,  $(-1)^{i+k}$ . Az al-determináns jele  $D_{ik}$ .

**A kifejtési tétel képletben:**

az  $i$ . sor szerinti kifejtés:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$$

A  $k$ . oszlop szerinti kifejtés hasonlóan:

Tehát  $D_{ik} = (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$ .

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{i=1}^n a_{ik} D_{ik}$$

**10. Ferde kifejtés**

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{jk}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{jk}$$

**A kifejtési tétel bizonyítása:**

a.) Első sora az első elem kivételével 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & & a_{kn} \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} & & & & \\ a_{22} & \dots & & & a_{2n} \\ a_{k2} & \dots & & & a_{kn} \\ a_{l2} & & & & a_{ln} \\ a_{n2} & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} D_{11}$$

b.)

Ha az i.sor a k. elem kivételével nem nulla, akkor hány szomszédos sor ill. oszlop cseréjével vihető az i. sor az első sor helyére, és a k. elem  $a_{11}$  helyére? Pl. a 2. sor első eleme nem nulla, a többi nulla, hogyan számítható ki a determináns értéke?

Az  $a_{ik}$  elemet k-1 darab szomszédos oszlopcserével és i-1 darab szomszédos sorcserével vihető  $a_{11}$  helyére, így az előző eset áll fenn. (Nem egyszerűen felcseréljük az 1. és i.sort, mert akkor nem az aldeterminánst kapnánk!!!)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{ik} & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & & & a_{(i+1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik} D_{ik}$$

c.) Ha nincsen olyan sor, amelynek elemei egy elem kivételével nullák, akkor bármelyik sor felírható mint az eredeti elem és  $n-1$  db nulla összege. A determináns pedig felbontható  $n$  db olyan determináns összegére, amelyben van egy elem kivételével csupa nulla sor.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ik} & a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + 0 + \dots + 0 & 0 + a_{i2} + 0 + \dots + 0 & 0 + 0 + \dots + a_{ik} + 0 + \dots + 0 & 0 + \dots + 0 + a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ik} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} D_{ik}$$

**“Ferde” kifejtés**

Ha a determináns kifejtésére vonatkozó képletben az  $a_{ik}$  sor elemei helyett pl. az  $a_{ik}$  sor elemeit szorozzuk meg rendre a  $D_{ik}$  aldeterminánsokkal, akkor az így kapott szám nulla.

Helyes kifejtés:  $\det(A) = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots + a_{1n}D_{1n}$

Ferde kifejtés:  $0 = a_{21}D_{11} + a_{22}D_{12} + \dots + a_{2n}D_{1n}$

**Bizonyítás(Hf. ált.):**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ha az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezésből indulunk ki, az ott álló elemeket a következő, két egyenlő sorral, tehát 0 értékkel rendelkező determinánsba lehet elrendezni:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$