

Vektoralgebra –előadás fóliák

Elméleti anyag –tételek, definíciók, bizonyítás vázlatok

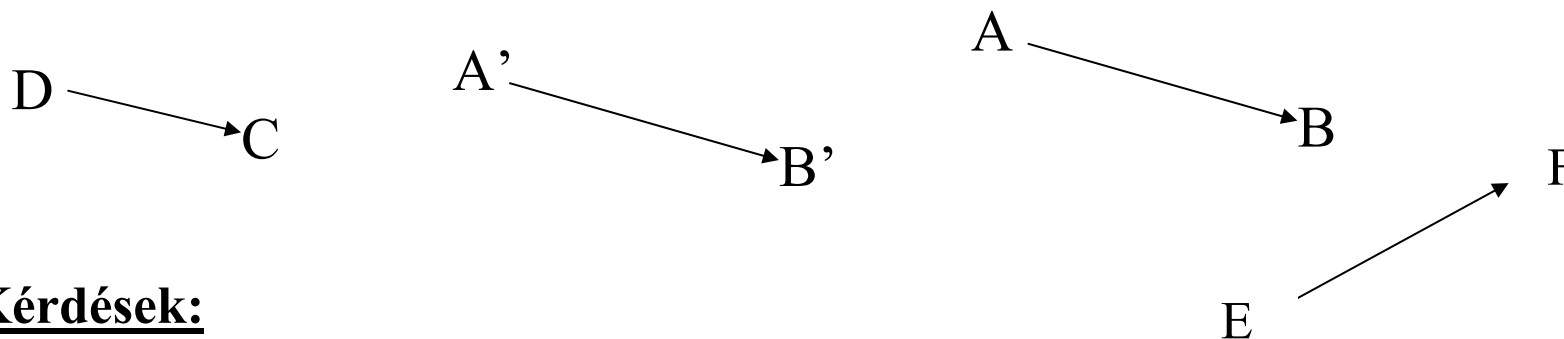
©Bércesné Novák Ágnes

Források, ajánlott irodalom:

Hajós György: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, 1971, 1989,..
Scharnitzki Viktor: Vektoralgebra és lineáris algebra, Tankönyvkiadó, 1989.
Bércesné Novák Ágnes-Hosszú Ferenc-Pentelényi Pál-Rudas Imre: Matematika, BDMF, 1994.

Vektoralgebra

1. Vektor: irányított szakasz (síkban, térben)



Kérdések:

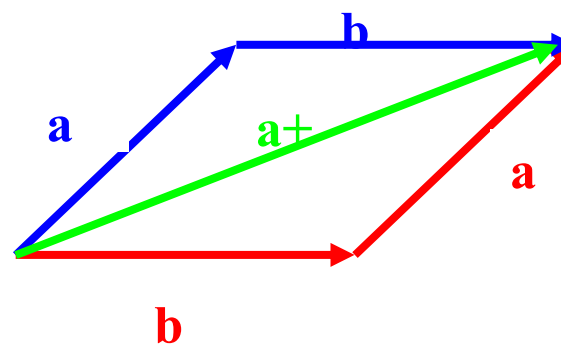
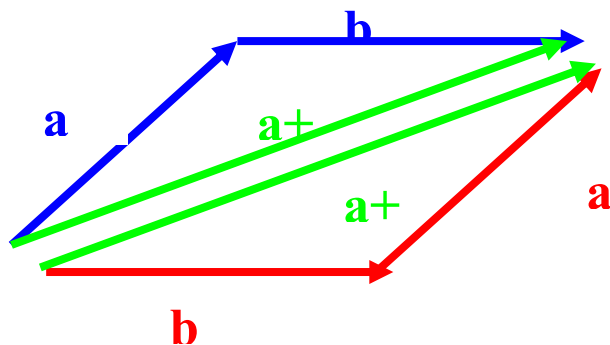
- Jelölések
- Egyenlőség $\rightarrow$ szabad vektorok
- Párhuzamosság
- Hossz (abszolút érték)
- Egységvektor
- Nullvektor – iránya

Műveletek vektorokkal

Összeadás:

- nyílfolyam-módszer: eltolás, a második vektor kezdőpontját az első végpontjába, és így tovább...

Összegvektor: az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor.
(Két vektor esetén paralelogramma módszernek)

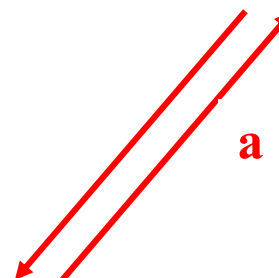


Összeadás tulajdonságai:

(0.Zárt: összeadás eredménye is vektor)

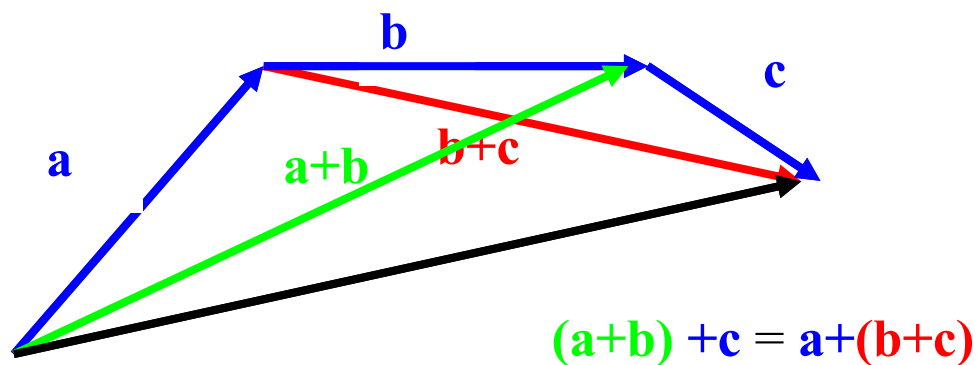
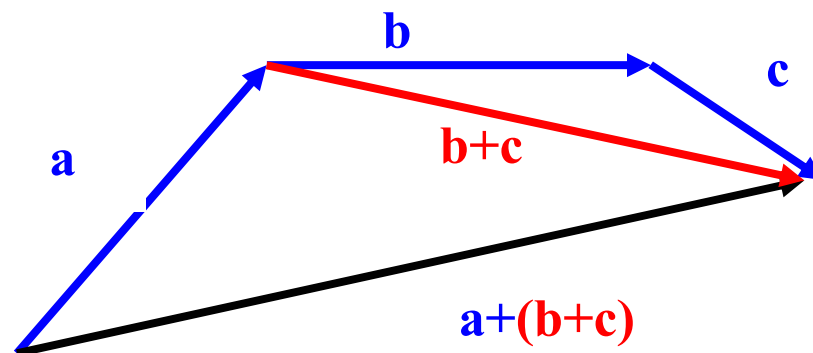
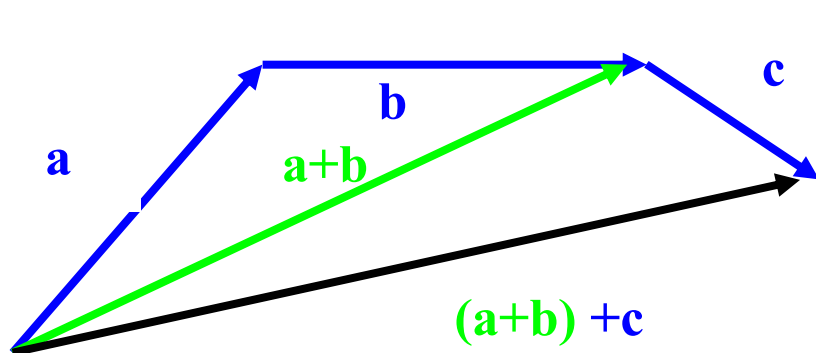
1. Kommutatív (ld. ábra): $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. Létezik egységelem: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
3. Létezik inverz (ellentett) elem: $\mathbf{a} + (\mathbf{a} \text{ inverze}) = \mathbf{0}$

a inverze



Összeadás tulajdonságai (folytatás):

4. Asszociatív: $(a+b) + c = a+(b+c)$

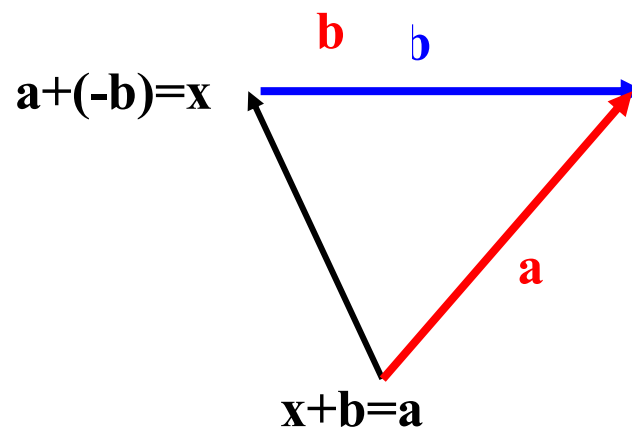
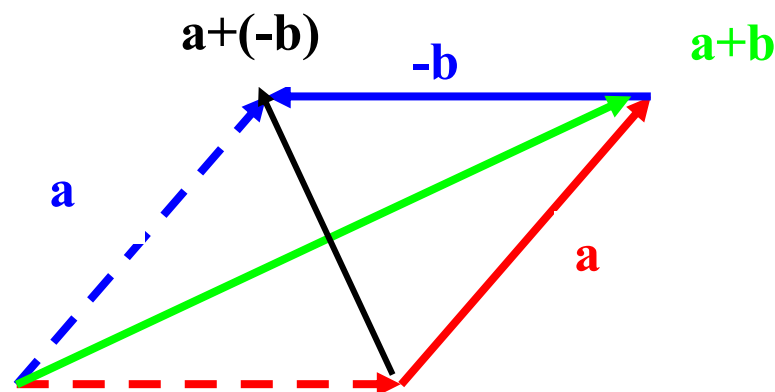
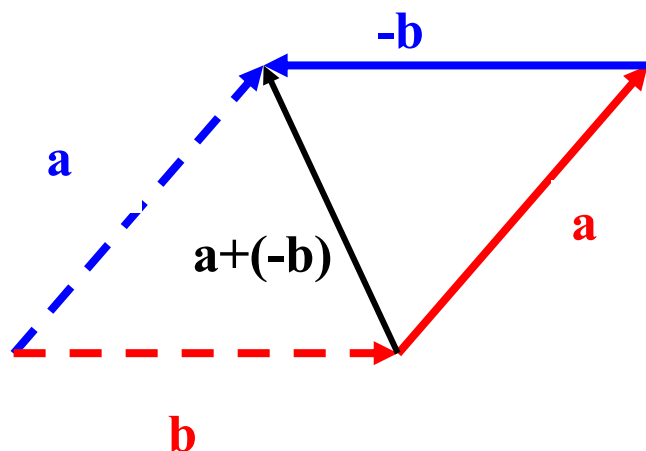


Kivonás értelmezése: inverz elem hozzáadása, inverz elem jelölése

$x+b=a$ vektoregyenletet x -re megoldva:

$$x+b+(b \text{ inverze})=a+(b \text{ inverze})$$

$$x+0= a+(b \text{ inverze}) \quad \text{Jelölés (számokkal összhangban): } \mathbf{a+(-b)= a - b=x}$$



Összeadás tulajdonságai (összefoglalás):

(- zárt)

- asszociatív
- létezik egység
- létezik inverz

CSOPORT

(- zárt)

- asszociatív
- létezik egység
- létezik inverz
- kommutatív

KOMMUTATÍV

CSOPORT

A kommutatív csoportot Abel csoportnak is hívjuk.

Feladat: Mondjunk példát más halmazra, melynek elemei adott műveletre nézve csoportot alkotnak

Szorzás

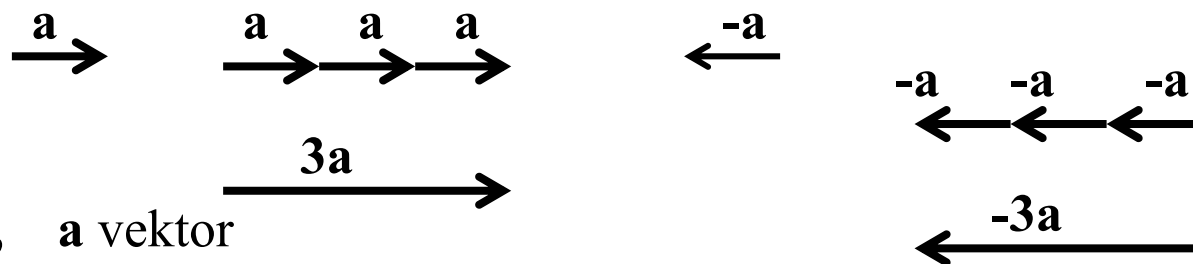
a.) Számot vektorral: számmal való szorzás ($\lambda \mathbf{a}$)

b.) Vektort vektorral-eredménye szám, neve: skalárszorzat, angolul: dot product, ($\mathbf{a} \mathbf{b}$)

c.) Vektort vektorral-eredménye vektor, neve: vektoriális (vagy kereszt)szorzat, angolul cross product ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)

Megjegyzés: A fenti szorzások közül algebrai értelemben csak a c.) nevezhető műveletnek. (Miért?)

Számmal való szorzás / Vektor szorzása számmal:



Def.: $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a}$ vektor

$\mathbf{a}$

$\lambda \cdot \mathbf{a}$ ↗ $\lambda \geq 0$, $\mathbf{a}$ -val egyirányú, hossza: $|\lambda \mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}|$ (ismételt összeadás)

↘ $\lambda < 0$, $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú, hossza: $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ (a inverzének, ellentettjének ismételt összeadása)

Lemma: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$

Biz.: $\Rightarrow$ Tegyük fel hogy (Tfh.) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}_a$ és $\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \mathbf{e}_a$

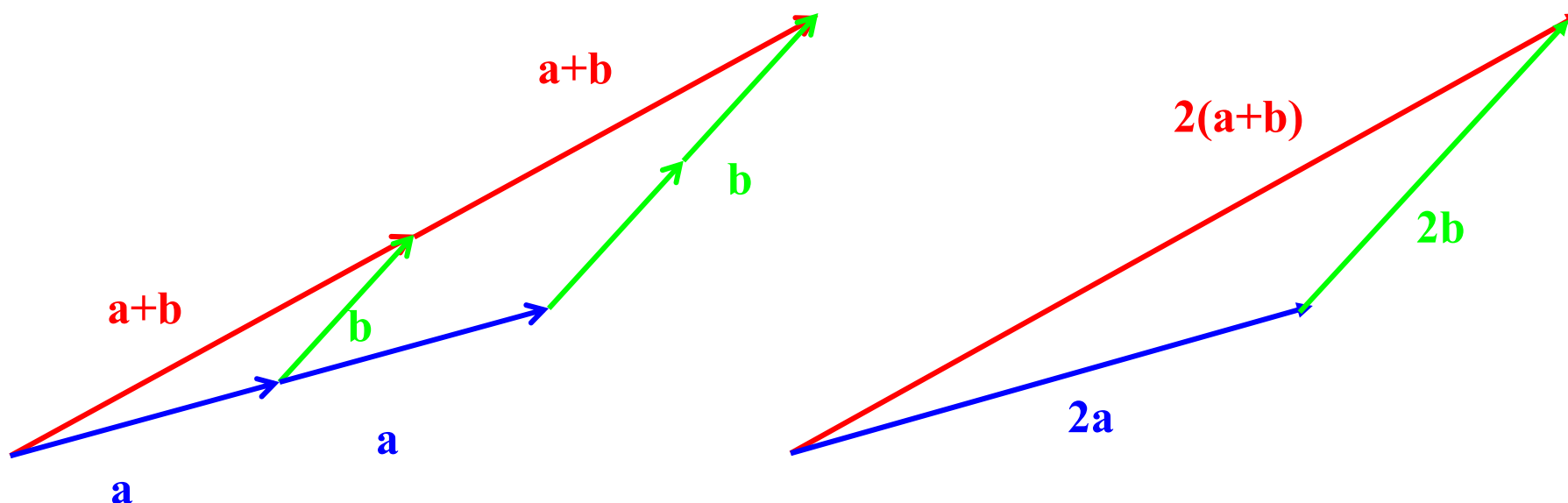
Ezekből: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| (1/|\mathbf{b}| (|\mathbf{b}| \mathbf{e}_a)) = |\mathbf{a}| (1/|\mathbf{b}|) \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, $\lambda = |\mathbf{a}| / |\mathbf{b}|$

$\Leftarrow$ Tfh. $\exists \lambda \in \mathbf{R} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, akkor a párhuzamosság a definícióból közvetlenül adódik.

Tulajdonságok:

1. $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda$
2. $\mu(\lambda \mathbf{a}) = (\mu \lambda) \mathbf{a}$ (definícióból közvetlenül adódik)
3. $(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}$ (definícióból közvetlenül adódik)
4. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ (ld. alábbi ábra)

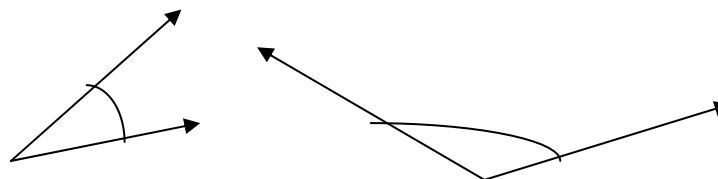
Ábra: 4. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, ábra: $\lambda=2$ eset



Skalárszorzat (belső szorzat)

vektor·vektor=szám (DOT product, INNER product)

Def.: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög, $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$. **Két vektor által bezárt szög (a kisebb!):**



Speciális esetek:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2,$$

Következmény: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ezt a tulajdonságot úgy mondjuk, hogy a skalárszorzat **pozitív definit**.

Ha $\mathbf{a}$ egységvektor, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \alpha$.

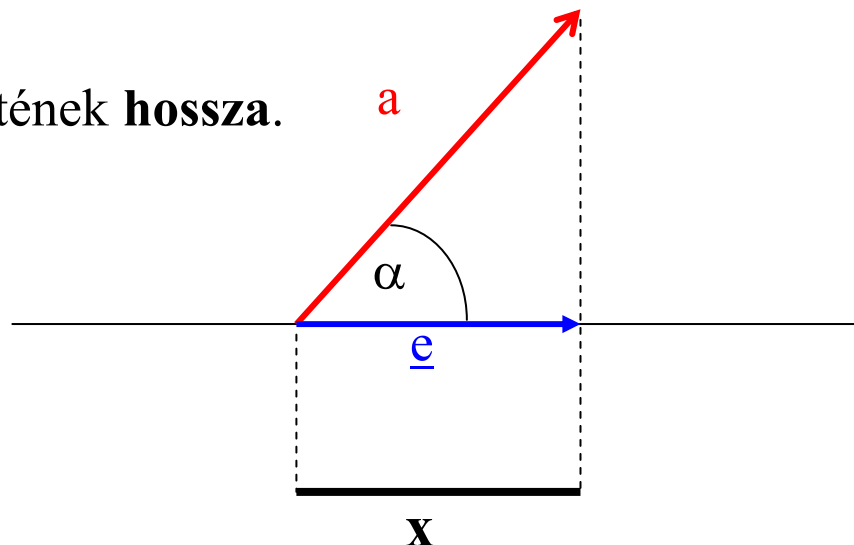
Ezek koordináta rendszertől független eredmények!!

A skalárszorzat geometriai jelentése:

$\mathbf{e}$ – egységvektor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = \mathbf{x}$

$\mathbf{x}$: az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ -re vett előjeles merőleges vetületének hossza.

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow \mathbf{x} = |\mathbf{a}| \cos \alpha$$



Megjegyzés:

A geometriai jelentés a definíció egyszerű **következménye**.

A skalárszorzat tulajdonságai:

1. **Kommutatív:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

2. **NEM** asszociatív: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, ugyanis:

Bal oldal = szám $\cdot \mathbf{c}$ = ($\mathbf{c}$ -vel párhuzamos vektor)

Jobb oldal = $\mathbf{a} \cdot$ szám ($\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektor)

3. $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$

Biz.: Nyilvánvaló, ha $\lambda = 0$, akkor az azonosság fennáll. Továbbá a kommutativitás miatt elegendő a $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ azonosság bizonyítása.

BALOLDAL: $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)$

JOBOLDAL: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (|\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha) = \lambda (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)$, ha $\lambda > 0$.

Ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda = (-1) |\lambda|$, emmiatt elegendő a $\lambda = (-1)$ eset tárgyalása:

BALOLDAL: $(-1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (-1) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$

JOBOLDAL: $(-1\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |(-1)\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(180 - \alpha) = (-1) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$

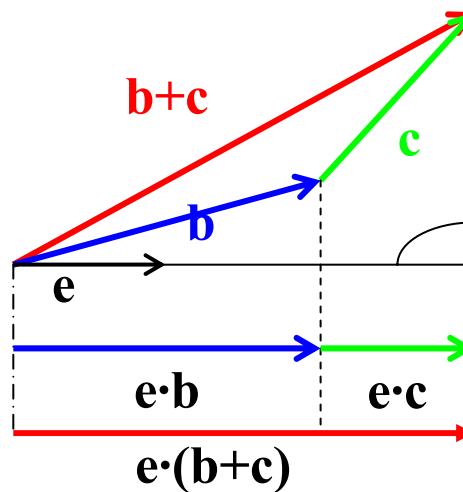
4. Disztributív: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Biz.:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$e \cdot (b+c) = e \cdot b + e \cdot c \quad / \cdot \lambda \quad e \parallel a \Rightarrow \lambda \cdot e = a$$

$$\lambda \cdot e(b+c) = (\lambda e) \cdot b + (\lambda e) \cdot c$$



Tétel: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (milyen koordináta rendszerben?)

Biz.: Ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ akkor $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$:

Ha $|\underline{a}| \neq 0$ és $|\underline{b}| \neq 0$, akkor $|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \angle = 90^\circ$

Ha valamelyik vektor nullvektor, annak iránya tetszőleges, így a merőlegesség teljesül.

Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})_1 \angle = 90^\circ$ vagy $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_2 \angle = 270^\circ$, de mivel a megállapodás szerint a kisebb szöget tekintjük, ezért a két vektor 90° -os szöget zár be

Ha a két vektor merőlegessége oly módon biztosított, hogy legalább egyikük nullvektor, akkor a **0** def. alapján $|\mathbf{a}| = 0$ vagy $|\mathbf{b}| = 0$, tehát $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

A skalárszorzat általános tulajdonságai

A skalárszorzat a $V \times V$ halmazon (ahol V vektortér) értelmezett, kétváltozós valós **függvény**, (nem művelet!) amely az alábbi, 1.-4. tulajdonságokkal rendelkezik. Minden olyan függvény, amely ennek eleget tesz, **skalárszorzat**-nak nevezhető.

Skalárszorzat: $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

A skalárszorzat egy másik, szokásos jelölése: $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

1. $s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, $s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ - szám $\leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ –vektor pozitív definit tulajdonság
2. $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ kommutatív tulajdonság
3. $s(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lineáris
4. $s(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ lineáris

A skalárszorzat egy másik, szokásos jelölése: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (pozitív definit)
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (kommutatív)
3. $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (lineáris)
4. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ (lineáris)

A 3.-4. linearitás a következőképpen is megfogalmazható: $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

A vektoralgebrában a skalárszorzatot $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvénnyel adtuk meg, és bizonyítottuk a fenti tulajdonságokat. Ezen definíció alapján bebizonyítható a következő tétel (ld. e jegyzet 28. oldalán):

Az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ortonormált bázisra vonatkoztatott koordinátákkal (a 3 dimenziós térben) a skalárszorzat:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

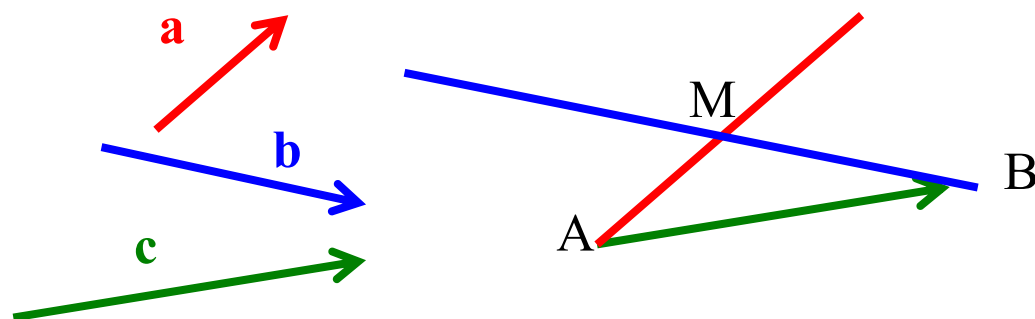
A $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$ is lehetett volna a definíciója a skalárszorzatnak, azonban így az eredeti fizikai jelentése elsikkadt volna. Magasabb dimenziós vektorterekben azonban a definíció lehetősége éppen fordított, szög geometriai értelmezhetetlensége miatt éppen a skalárszorzat segítségével lehet a szög fogalmát kialakítani.

Tétel (Vektorok felbontása síkban): Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor (**a** és **b**), akkor minden más **c** síkbeli vektor felbontható **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőkre:

$$\underline{\mathbf{c}} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \text{ ahol } \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

A felbontás egyértelmű.

Biz.: felbonthatóság: A c vektorkezdőpontján át húzzunk a -val, végpontján át b -vel (vagy fordíva) párhuzamos egyeneseket. Mivel a és b nem párhuzamosak, ezért M -ben metszik egymást.



mivel $\overrightarrow{AM} \parallel \underline{a} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \underline{a}$ $\underline{c}$

mivel $\overrightarrow{MB} \parallel \underline{b} \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \beta \underline{b}$, és $\underline{c} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$

Tétel (Vektorok felbontása síkban): Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor (**a** és **b**), akkor minden más **c** síkbeli vektor felbontható **a** és **b** vektorokkal párhuzamos összetevőkre: $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. A felbontás egyértelmű.

Biz.: Egyértelműség:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{c} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} \\ 0 &= (\underbrace{\alpha_2 - \alpha_1}_0) \mathbf{a} + (\underbrace{\beta_1 - \beta_2}_0) \mathbf{b} \end{aligned}$$

Mivel **a** nem párhuzamos **b**-vel, így számszorosaik sem párhuzamosak, ezért számszorosaik összege nem lehet nulla a jobb oldalon. Tehát a és b együtthatói egyenlők nullával: $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$

Definíció:

a és b lineáris kombinációja: $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$

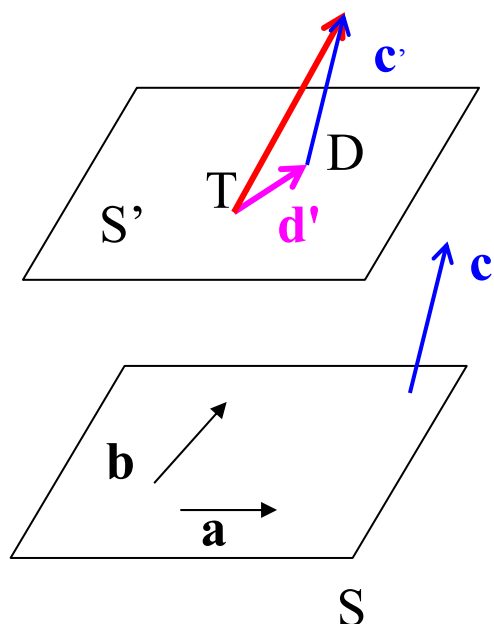
{ a,b }, ha **a** nem párhuzamos **b**-vel, akkor **függetlenek**. Maximális számú független vektor **bázis** alkot. Később részletesen tárgyaljuk..

α, β az **{ a,b }** bázisra vonatkoztatott **koordináták**.

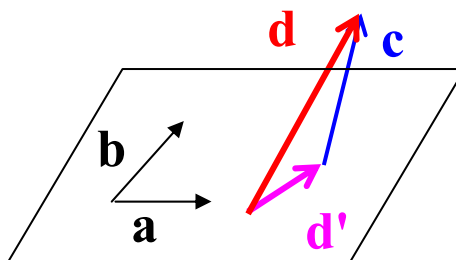
Tétel (Vektorok felbontása térben):

Ha adott a térben három, nem egysíkú, páronként nem párhuzamos vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, akkor bármely $\mathbf{d}$ térbeli vektorhoz van olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, amelyekre igaz, hogy $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Ez a felbontás egyértelmű.

Biz.:



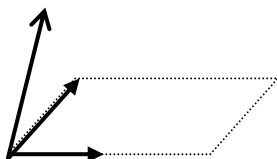
1. $\mathbf{d}$ talppontján, T-n át az S síkkal $\parallel$ S' síkot rajzolunk.
2. $\mathbf{c}$ nem párhuzamos $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, tehát a $\mathbf{d}$ végpontjában $\mathbf{c}$ -vel húzott $\parallel$ egyenes D-ben dőli S'-t.
3. D-ből T-be mutató vektor legyen $\mathbf{d}'$.



$\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \mathbf{c}' = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) + \gamma\mathbf{c}$,
hiszen $\mathbf{d}'$ egy síkban van $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, így az előző tétel miatt felírható azok lineáris kombinációjaként.

Bázis: A térben bármely 3, nem egysíkú, páronként nem párhuzamos vektor független. Maximális számú független vektor **bázist** alkot. Később részletesen tárgyaljuk.

Például:



Ha **a, b, c**, a tér egy bázisa, az előző tétel értelmében bármely **d** vektorra:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés az **a, b, c** vektorok egy **lineáris kombinációja**.

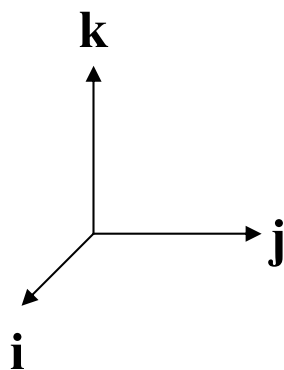
Az α, β, γ számokat a **d** vektor **a, b, c** bázisra vonatkoztatott koordinátáinak nevezzük. Ha a bázisvektorok sorrendjét rögzítjük, a lineáris kombinációt rövidíthetjük a következő számhármassal: $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Speciális bázisok:

Ortogonalis: a vektorok páronként merőlegesek

Normált: a vektorok egységnyi hosszúak

Ortonormált: ortogonalis és normált, szokásos jelölése 3 dimenzióban: **i, j, k** (Descartes), jobbrendszer:



Vektorműveletek, ha a vektorok koordinátaikkal adottak

Összeadás: megfelelő koordinátákat összeadjuk

Biz.:

$$X = \alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2 + \gamma \mathbf{b}_3$$

$$Y = \delta \mathbf{b}_1 + \varepsilon \mathbf{b}_2 + \phi \mathbf{b}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (\alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2 + \gamma \mathbf{b}_3) + (\delta \mathbf{b}_1 + \varepsilon \mathbf{b}_2 + \phi \mathbf{b}_3) = \\ &= (\alpha \mathbf{b}_1 + \delta \mathbf{b}_1) + (\beta \mathbf{b}_2 + \varepsilon \mathbf{b}_2) + (\gamma \mathbf{b}_3 + \phi \mathbf{b}_3) = \\ &= (\alpha + \delta) \mathbf{b}_1 + (\beta + \varepsilon) \mathbf{b}_2 + (\gamma + \phi) \mathbf{b}_3 = \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha + \delta) \mathbf{b}_1 + (\beta + \varepsilon) \mathbf{b}_2 + (\gamma + \phi) \mathbf{b}_3$$

VEKTOR ÖSSZEADÁS + SZÁMOK ÖSSZADÁSA +

Számmal való szorzás: koordinátánként szorozzuk a számmal

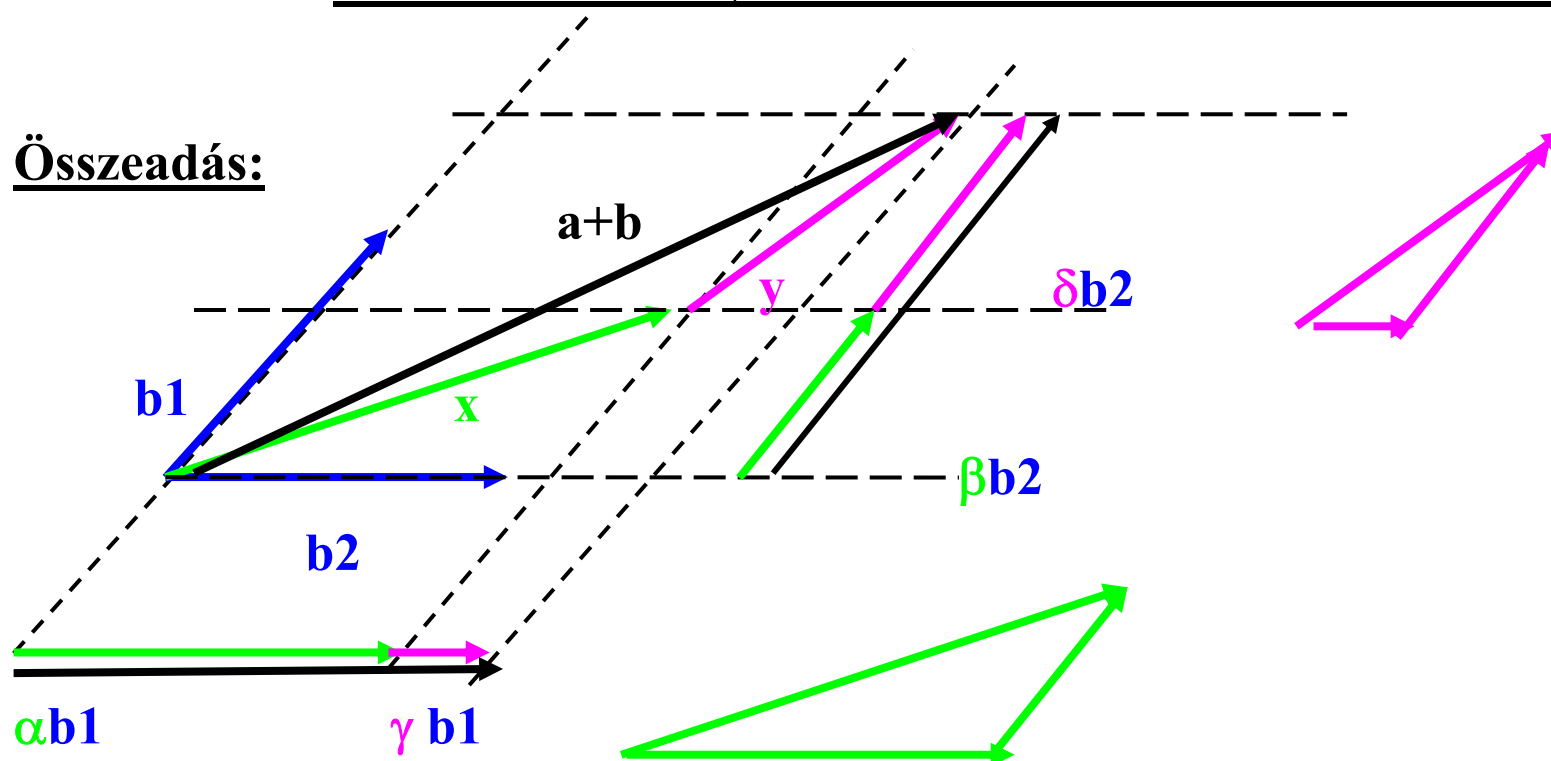
Biz.: HF

Kivonás: Megfelelő koordinátákat kivonjuk

Biz.: HF

Vektorműveletek, ha a vektorok koordinátaikkal adottak

Összeadás:



$$X = \alpha b_1 + \beta b_2$$

$$Y = \gamma b_1 + \delta b_2$$

$$x + y = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_1 + \delta b_2 = (\alpha b_1 + \gamma b_1) + (\beta b_2 + \delta b_2)$$

$$x + y = (\alpha + \gamma) b_1 + (\beta + \delta) b_2$$

VEKTOROK ÖSSZEADÁSA: koordinátáinként

Milyen koordinátarendszerben igaz e szabály?

Műveletek koordinátás alakban, ORTONORMÁLT BÁZISBAN

A koordináták szemléltetésére animáció:

http://www.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter_13/Graphics/Chapter13_1/DemoHtml3_1/13.1coorsys.htm

Műveletek koordinátás alakban, ORTONORMÁLT BÁZISBAN

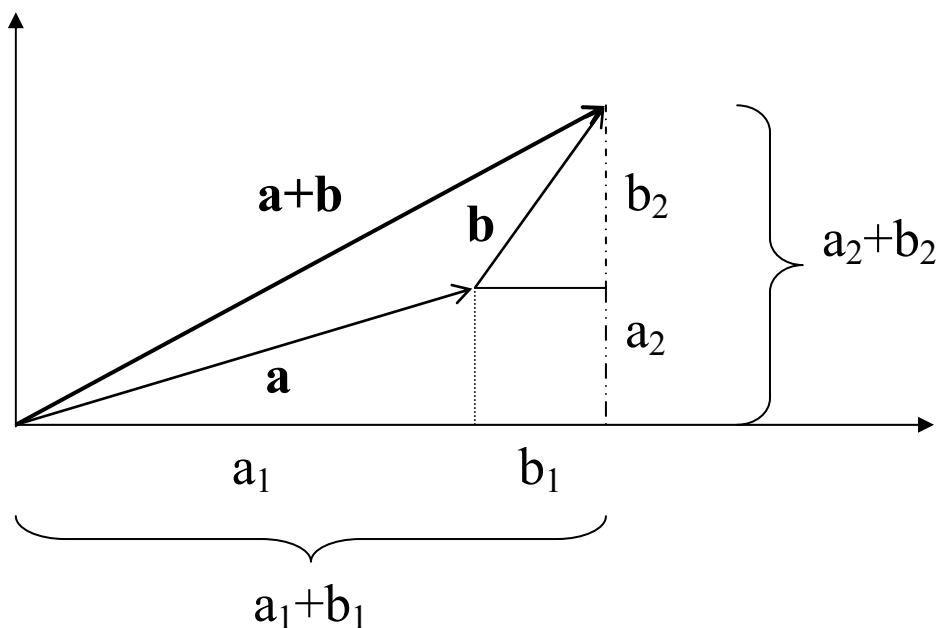
Uu., mint általános bázisban:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \Leftrightarrow x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = (\lambda a_1)\mathbf{i} + (\lambda a_2)\mathbf{j} + (\lambda a_3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + b_3\mathbf{k} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}$$



Skalárszorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

Animáció:

<http://www.falstad.com/dotproduct/>

(mind a piros, mind a kék vektort a végénél fogva lehet mozgatni, jobb felső sarokban leolvasható minden számadat. A piros vektor vetülete látható a kék vektoron.)

<http://magnus.poly.edu/~mleung/java/vectors/dproduct/dproduct.html>

Skálárszorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

A skalárszorzat értéke függ a bázistól.

Tétel: Legyenek $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként merőleges egységvektorok, amelyek jobbrendszert alkotnak. (Descartes). A felbontási tétel szerint ekkor:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

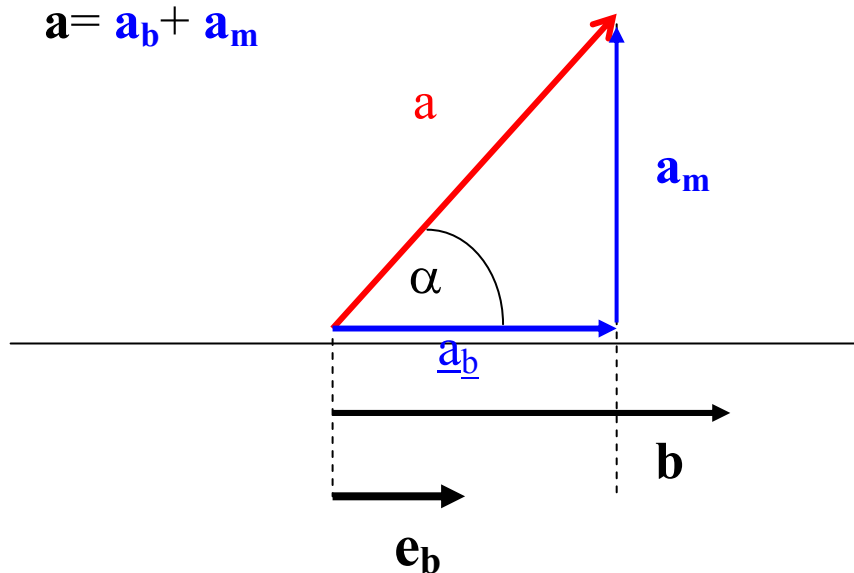
Alkalmazva a skalárszorzat disztributív tulajdonságát:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1\mathbf{i} \cdot b_1\mathbf{i} + a_1\mathbf{i} \cdot b_2\mathbf{j} + a_1\mathbf{i} \cdot b_3\mathbf{k} + \\ &+ a_2\mathbf{j} \cdot b_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \cdot b_2\mathbf{j} + a_2\mathbf{j} \cdot b_3\mathbf{k} + a_3\mathbf{k} \cdot b_1\mathbf{i} + a_3\mathbf{k} \cdot b_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \cdot b_3\mathbf{k} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

Felhasználása:

- I. Fizika, pl. $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$
- II. Vetületek (Pl. fizikában is erők felbontása)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_m$$



$$\mathbf{a}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b \quad \mathbf{a}_b = (\text{hossz}) \text{ irány}$$

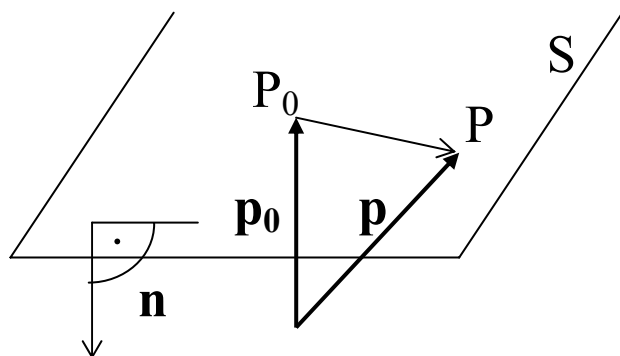
III. Sík normálvektoros egyenlete

Animáció:

http://www.usd.edu/~jflores/MultiCalc02/WebBook/Chapter_13/Graphics/Chapter13_5/DemoHtml13_5/13.5%20LinesAndPlanes.htm

IV. Sík normálvektoros egyenlete

$\mathbf{n}$ az S sík normálvektora ($\mathbf{n}$ a síkra merőleges)



$P_0(x_0, y_0, z_0)$ – a sík tartópontja (tetszőleges, de rögzített)

$P(x, y, z)$ – a sík tetszőleges pontja, futópont

S egyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, hiszen merőleges vektorok

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$$

Példa:

$$\begin{array}{l} \mathbf{n}(1,2,3) \\ \mathbf{p}_0(4,5,6), \end{array} \longrightarrow \mathbf{P}_0 \mathbf{P} = (x-4), (y-5), (z-6)$$

$$P(x,y,z) \quad (x-4) \cdot 1 + (y-5) \cdot 2 + (z-6) \cdot 3 = 0$$

$$\text{Rendezve: } 1x + 2y + 3z - 4 - 10 - 18 = 0$$

$$(1)x + (2)y + (3)z = 32$$

Általában az

$Ax + By + Cz = D$ lineáris egyenlet egy A, B, C , normálvektorú sík egyenletének tekinthető.

Típusfeladatok:

1. Koordinátaival adott a sík 3 pontja. Adja meg a sík egyenletét!
2. Adott 4 pont. Hogyan lehet eldönteni, hogy egysíkúak-e?

Vektoriális szorzat:

vektor $\times$ vektor=vektor (CROSS product)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}$$

$$\text{hossz} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$|\mathbf{e}| = 1$ $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ jobbrendszer alkot($\mathbf{a}$ -hüvelyk-, $\mathbf{b}$ -mutató-, $\mathbf{e}$ -középsőujj)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \parallel \mathbf{e}$$

Érdekes ez az animáció:

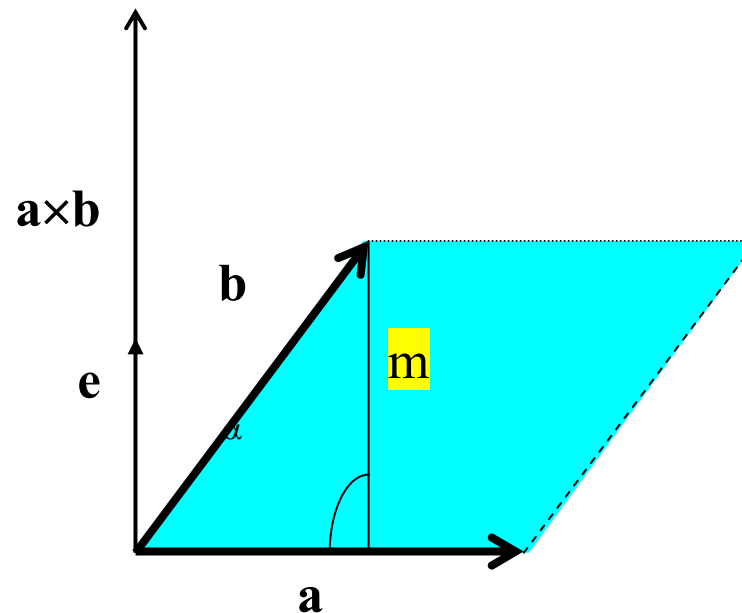
<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>

(Megjegyzés: az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat lehet mozgatni az egérrel, a $\mathbf{c}$ vektorral lehet forgatni az ábrát)

A vektoriális szorzat geometriai jelentése:

$$m = |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$

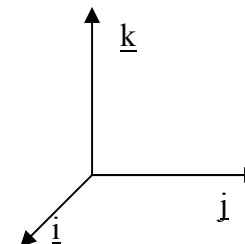
$$\text{alap: } |\mathbf{a}|$$



$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha = \text{Terület} = (\text{alap} \cdot \text{magasság})$$

Fontosabb vektoriális szorzatok:

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{array} \right\} \text{Jobbrendszert alkot és merőleges, így} \\ \text{nem lehet más, mint a 3. vektor.}$$



$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \text{ stb.}$$

A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \text{ antikommutatív}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \text{ (nem asszociatív)}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \end{array} \right\} \text{kétoldali disztributivitás}$$

Vektoriális szorzat kiszámítása ORTONORMÁLT BÁZISban

Tétel:

Ha

$$\mathbf{a} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k})$$

$$\mathbf{b} = (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \text{ adottak, akkor}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = & (a_1 \mathbf{i} \times b_1 \mathbf{i}) + (a_1 \mathbf{i} \times b_2 \mathbf{j}) + (a_1 \mathbf{i} \times b_3 \mathbf{k}) + \\ & (a_2 \mathbf{j} \times b_1 \mathbf{i}) + (a_2 \mathbf{j} \times b_2 \mathbf{j}) + (a_2 \mathbf{j} \times b_3 \mathbf{k}) + \\ & (a_3 \mathbf{k} \times b_1 \mathbf{i}) + (a_3 \mathbf{k} \times b_2 \mathbf{j}) + (a_3 \mathbf{k} \times b_3 \mathbf{k})\end{aligned}$$

Felhasználva az előzőleg kiszámított vektoriális szorzatokat, és alkalmazva a disztributivitást (kiemelés):

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{Determináns})$$

Determinánsok kiszámítása a kifejtési TÉTEL szerint (nem definíció, később biz.):

$$1 \times 1: |a_{1_1}| = a_{1_1}$$

2×2 : Sor szerinti kifejtés: a sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó (előjeles) aldeterminánssal és az így kapott számokat összeadjuk.

Adott elemhez tartozó (előjeles) **aldetermináns**: Az elem sorát és oszlopát elhagyva újabb determinánst kapunk. Előjele a sakktábla szabály szerint.

$$\text{Pl. első sor szerint kifejtve: } \begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{1_2} \\ a_{2_1} & a_{2_2} \end{vmatrix} = a_{1_1} a_{2_2} - a_{2_1} a_{1_2}$$

3×3 : Sor szerinti kifejtés: a sor minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó (előjeles) aldeterminánssal és az így kapott számokat összeadjuk.

Tétel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Biz.:

$$1) \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Ha a két vektor egymással párhuzamos, akkor a bezárt szög 0 vagy π , és így a $\sin(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, tehát $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

$$2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoriális szorzata $\mathbf{0}$, akkor a

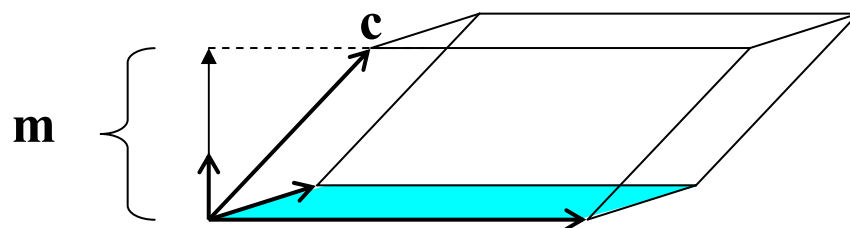
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(a, b) = \mathbf{0}$$

A jobb oldalon álló nullvektor kétféleképpen állhat elő. Vagy $\sin(a, b) = 0$, és ekkor a bezárt szög $= 0^\circ$ vagy $\pi \Rightarrow$ a két vektor párhuzamos. A másik eset, hogy $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ legalább egyike nullvektor. Nullvektor iránya tetszőleges, így a párhuzamosság fennáll.

Vegyes szorzat

Definíció: Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ szorzatot vegyes szorzatnak nevezzük.

Geometriai jelentés:



$\mathbf{e}$ legyen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel $\parallel$ egységvektor, tehát merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjára
 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$: **alapterület**,

$$\overbrace{(|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e})}^{\mathbf{a} \times \mathbf{b}} \cdot \mathbf{c} = (\underbrace{\text{alapterület} \cdot \text{magasság}}_{\text{magasság}}) = \text{előjeles térfogat}$$

Az előjel a paralelepipedon elhelyezkedését (attól függően + vagy -, hogy a $\mathbf{c}$ vektor ugyanabba a térfélbe mutat-e, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) adja meg, a szám pedig a térfogat mérőszámát.

Vegyes szorzat kiszámítási módja ortonormált bázis esetén

Tétel: Ha $\mathbf{a}=(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})$
 $\mathbf{b}=(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$
 $\mathbf{c}=(c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k})$ adottak, akkor $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Biz.: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) =$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{c} = \left(\mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$