

Diagonalizálás

Definíció: Az A kvadratikus mátrix hasonló a D kvadratikus mátrixhoz, ha létezik egy olyan P (invertálható, kvadratikus) mátrix, amelyre: $A = P^{-1}DP$.

Definíció: Az A kvadratikus mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Példa NEM diagonalizálható mátrixra:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ha A diagonalizálható lenne, akkor (I := identitás mátrix, egységmátrix):

$$A - \lambda I_n = P^{-1}DP - \lambda I_n = P^{-1}DP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(D - \lambda I_n)P,$$

Vagyis

$$A - \lambda I_n \quad \text{hasonló lenne} \quad D - \lambda I_n$$

ami azt jelenti, hogy A és D sajátértékei egyenlők. Az A sajátértékei a diagonálisában állnak, egyetlen sajátértéke tehát a (2 multiplicitású) 2. Ezért az D mátrix, amihez az A hasonló lehet, az csak a $2I$ mátrix lehet:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Ekkor $A = P^{-1}DP = 2I_2$, lenne, ami pedig nem igaz.

Tétel: Ha valamely A kvadratikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Bizonyítás:

1. Bizonyítottuk, ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor a transzformáció mátrixa e sajátbázisra vonatkoztatva diagonális, és pedig a diagonálisban éppen a sajátértékek állnak. (Az állítás fordítva is igaz, ha a transzformáció mátrixa diagonális, akkor az a sajátvektorok bázisában van felírva.)
2. Előadásjegyzetben bizonyítottuk, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek. Tehát, ha sajátértékek mind különbözők, szükségképpen bázist is alkotnak.
3. Végül, ha egy transzformáció mátrixát másik bázisban írjuk fel, akkor az új bázisra vonatkozó koordináták közti összefüggés:

$$A' = S^{-1}DS,$$

ahol az S áttérési mátrix oszlopvektorai az új bázisvektorok, vagyis a sajátvektorok (régibázisra vonatkoztatott) koordinátái, a D a transzformáció eredeti bázisra vonatkoztatott mátrixa.

Fentiek szerint A' diagonális, és diagonálisában a sajátértékek állnak.

Az egyenletet rendezve adódik, hogy

$$D = S A' S^{-1}$$

Példa diagonalizálásra (az előadáson elhangzott példa, javítva:)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ ennek sajátértékei: } 5, 4 \text{ az ezekhez tartozó sajátvektortok rendre: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítve a fenti képletbe: $D = S A' S^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát, a $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix hasonló az $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixhoz.

A fenti tétel általánosabban:

Tétel: Ha valamely A ($n \times n$) típusú mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (az ún. *sajátalterek*) dimenzióinak összege éppen n , akkor a mátrix diagonalizálható.

Pontosabban: ha mindegyik sajátértékre igaz, hogy az általa meghatározott *altér dimenziója egyenlő az algebrai multiplicitásával*, akkor a mátrix diagonalizálható.

Emiatt a feladatmegoldásban célszerű először a többszörös multiplicitású sajátértékekhez tartozó alterek dimenzióját megvizsgálni.

Példa: Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Ha igen, adja meg a hozzá hasonló diagonális mátrixot!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda), \text{ a sajátértékek: } \lambda = 2 \text{ kétszeres multiplicitással, } \lambda = 1, \text{ egyszeres multiplicitással.}$$

Visszahelyettesítve a

$\det(A - \lambda I)\underline{x} = 0$ egyenletbe, kapjuk a sajátvektorokat:

$$\lambda=1\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda=2\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ és } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint a $\lambda=2$ -höz tartozó sajátaltér dimenziója 2, ez egyezik az algebrai multiplicitással, így a mátrix diagonalizálható.

Összefoglalva:

Az $(n \times n)$ -es A mátrix diagonalizálása:

1. A sajátértékek kiszámításához meg kell oldanunk a karakterisztikus egyenletet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

2. Ennek gyöktényezős alakját tekintve:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

A λ_i sajátvektorok (lehetnek komplexek is!) algebrai multiplicitása n_i

3. Mindegyik sajátértékhez megkeressük a hozzá tartozó sajátvektor, vagyis megoldjuk a következő egyenletet:

$$\det(A - \lambda_k I)\underline{x}_k = 0$$

A kapott $\underline{x}$ vektort megpróbáljuk maximális számú független vektor összegeként előállítani:

$$\underline{x}_k = c_{1k}\underline{x}_{1k} + c_{2k}\underline{x}_{2k} + \dots + c_{nk}\underline{x}_{nk}$$

n_{nk} tehát a λ_k sajátértékhez tartozó altér **dimenziója, másképpen a sajátérték geometriai multiplicitása**. Az $\underline{x}_{jk}$ vektorok is sajátvektorok, amint az könnyen ellenőrizhető.

4. Ha $\sum n_{ij} = n$, akkor a mátrix diagonalizálható, és a hozzá hasonló A' mátrix az alábbi képlettel számolható:

$$A' = S^{-1}AS,$$

ahol S a sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrix. Az A' diagonális mátrix diagonálisában a sajátértékek állnak, olyan sorrendben, ahogyan a hozzájuk tartozó sajátvektorokat a mátrixba beírtuk, tehát az i . oszlopban a fődiagonálisban az S mátrix i . oszlopvektorában álló sajátvektort meghatározó sajátérték áll.

Az A mátrix tehát hasonló az A' diagonális mátrixhoz, mert: $A = S A' S^{-1}$

Megjegyzés: Nyilvánvaló, ha mindegyik sajátérték különböző, akkor algebrai multiplicitása 1, és mivel a sajátvektorok nem lehetnek nullvektorok, ezért ez egyezik geometriai multiplicitásukkal, tehát a mátrix diagonalizálható.

5. Ha valamelyik sajátaltér dimenziója nem egyezik meg a sajátérték algebrai multiplicitásával, akkor a mátrix **nem** diagonalizálható (de szebb, ún. Jordán alakra hozható)

Példa: Diagonalizálja a köv mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(-2-\lambda).$$

$\lambda = -1$:

$$(A + I_n)X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}.$$

Ez a $-y + z = 0$ -val ekvivalens:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 2I_n)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó (oszlop)vektort írjuk előre, akkor viszont:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A diagonalizálással a mátrixok hatványai (pl. köbe, köbgyöke alább) könnyen kiszámítható, ami a dinamikai rendszerekkel kapcsolatos számításokat jelentősen megkönnyíti.

$$A = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$B^3 = A.$$

Vagyis B a köbgyöke A -nak.

Példa nem diagonalizálható mátrixra (az indító példához hasonló, másképpen megoldva):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{cases} 0x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez nem írható fel két független vektor összegeként, tehát ez a mátrix nem diagonalizálható.

Egy komplex példa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A sajátvektorok:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Házi feladat: Diagonalizálja az alábbi mátrixot, és számítsa ki harmadik hatványát!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$