

Mátrix

Def.: Legyen T kommutatív test, k, n természetes számok. Ekkor a T test feletti **$k \times n$ -es mátrixon** egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek k sora és n oszlopa van, elemei pedig a T -ből valók.

A mátrix **típusa** $k \times n$. A T – beli elemekkel rendelkező, $k \times n$ típusú mátrixok halmazát $T^{k \times n}$ -nel is jelöljük.

A továbbiakban $T = \mathbb{R}$ (valós számok).

További jelölések:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, n} \in T^{k \times n}$$

Speciális mátrixok:

Sorvektor : $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$

Oszlopvektor:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Nullmátrix (összeadás egységeleme):

$$a_{ik} = 0, \text{ jele: } \underline{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Egységmátrix (szorzás egységeleme),
kvadrátikus= n x n :**

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonál mátrix :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Szimmetrikus mátrix:

$$a_{ik} = a_{ki} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Mátrixok számmal való szorzása (nem művelet!)

$$\lambda \cdot A = C \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad c_{ik} = \lambda \cdot a_{ik}$$

Megállapodás szerint $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$.

Műveletek mátrixokkal:

Mivel a már tanult vektorok speciális mátrixok, ezért a műveleteket célszerű a már ismert (koordinátás alakban tanult) vektorösszeadással és (skalár)szorzattal összhangban megadni.

Mátrixok összeadása:

Ebben a részben $A, B, C, \underline{0}$ azonos típusú mátrixok.

$$C = A + B$$

$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ (számok) (c_{ik}, a_{ik}, b_{ik} jelenti rendre a C (eredménymátrix), A, B mátrixok i .sorának k .elemét)

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

A mátrix összeadás tulajdonságai:

Abel-csoport

1. Valóban művelet, hiszen két $(n \times m)$ típusú mátrixhoz ugyanolyan típusú mátrixot rendel. (zárttság)
2. Kommutatív : $A+B=B+A$
3. Asszociatív : $(A+B)+C=A+(B+C)$
4. Minden A-hoz létezik (egyetlen) egység, a $\underline{0}$ (nullmátrix), amelyre $A + \underline{0} = A$
5. Minden A-hoz létezik inverz (ellentett) elem, amelyre $A+A'=\underline{0}$

Mátrixok szorzása

Vektorok skalárszorzatának kiszámítására

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad \text{vonatkozó tételen alapul:}$$

A $C = A \cdot B$ mátrixot úgy kapjuk, hogy A minden sorvektorának képezzük a skalárszorzatát B minden oszlopvektorával. Ezért ha A típusa $(n \times m)$, akkor B típusa $(m \times k)$. Ez azt jelenti, hogy az A és B mátrix csak abban az esetben szorozható össze, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. A szorzatmátrix típusa ennek megfelelően $(n \times k)$.

$$c_{ik} := \sum_{l=1}^m a_{il} \cdot b_{lk}$$

Példák:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 32 \\ 17 & 18 & 77 \end{bmatrix}$$

Speciális eset: egységmátrixszal való szorzás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Feladat: Végezze el az alábbi szorzást:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzásának tulajdonságai:

1. Csak tágabb értelemben művelet, ha az összes mátrixok halmazát nézzük. Ha az alaphalmaz $T^{k \times n}$, akkor a szorzás nem művelet, hiszen különböző típusú mátrixokon van értelmezve, és különböző típust hoz létre.

2. nem kommutatív

3. asszociatív: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

4. disztributív: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

$$(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A) \text{ (mivel a szorzás nem kommutatív)}$$

5. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$

6. A négyzetes, $\det(A) \neq 0$ mátrixoknak van inverz eleme, A^{-1} (def. ld. alább).

I. Példa arra, hogy mátrixok szorzása NEM kommutatív:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = BA.$$

II. Példa arra, hogy a szorzás műveletekor a szokásos egyenletrendezés nem érvényes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow AC = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = BC \text{ DE } A \neq B \text{ (magyarázat alább)}$$

III. Példa arra, hogy mátrixok szorzata lehet a null mátrix úgy, hogy egyik tényező sem null mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA \text{ DE } A \neq 0, B \neq 0.$$

$$\text{IV. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AI_2 = I_2A = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Def.: Azt az A^{-1} -gyel jelölt, $n \times n$ -es mátrixot, amelyre $A \cdot A^{-1} = (A^{-1} \cdot A) = E_n$, az A , $n \times n$ -es **mátrix inverzének** nevezzük.

Megjegyzés: A mátrix inverzének egyértelműsége a szorzás asszociativitásának következménye.

Inverz mátrix tulajdonságai:

1. $(A^{-1})^{-1} = A.$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **FONTOS!! Bizonyítsa be!**
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. Ha C invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni:
 - $AC = BC \Rightarrow A = B.$ **BIZ.:** szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát jobbról

C^{-1} -gyel.

- $CA = CB \Rightarrow A = B$. BIZ.: szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát balról C^{-1} -gyel.

Példa volt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AC = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = BC \text{ DE } A \neq B$$

Itt az egyenletrendezés azért nem érvényes, mert C SZINGULÁRIS (Nincs inverze!)

Inverz mátrix számítása Gauss-Jordan eliminációval:**Példa:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{. Keressük az inverzet a következő alakban: } A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \text{.}$$

Ez a következő egyenletek megoldását jelenti:

$$A \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Három lineáris egyenletrendszert kell megoldani, olyanokat, amelyeknek az együttható mátrixa

azonos, és a jobboldali b konstansokból álló vektor rendre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A három egyenletrendszer kibővített mátrixai:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Gauss-Jordan elimináció első lépésében például az utolsó elem nullázásakor a köv. adódik:

$$\xrightarrow{(3)=(3)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

AZONOSAK A JELÖLT RÉSZEK

Csak az utolsó oszlopban van eltérés. Így egyszerre is megoldhatjuk a 3 egyenletrendszert, megjegyezve, hogy az 4., 5., 6. oszlop rendre az első, második, harmadik egyenletrendszerhez tartozik.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{(3)=(3)+(1)} & \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] . \\ \hline A & & E_3 \end{array}$$

stb...

Az $n \times n$ -es A mátrix inverzének számítása:

1. $n \times 2n$ kibővített mátrix:

$$[A \quad \vdots \quad E_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A Gauss-Jordan eliminációt alkalmazva: $[E_n \ : \ D]$ alakra hozzuk a mátrixot, D lesz az A inverze (amennyiben E_n létrehozható). Előfordulhat, hogy a mátrix első n oszlopában NEM áll elő az egységmátrix, akkor az inverz NEM létezik, a mátrix szinguláris.

Példa (folytatás):

A fenti módszerrel keressük meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét:

1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)=(3)+(1) \\ (2)=(2)-2*(1)}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{(2)=-1*(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} (1)=(1)+(2) \\ (3)=(3)-2*(2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} (1)=(1)+(3) \\ (2)=(2)-(3) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tehát A inverze:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tétel:

Ha A $n \times n$ -es mátrix, és A reguláris (nem szinguláris, vagyis, van inverze) akkor az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, és ez $x = A^{-1}b$.

A tétel megfordítása is igaz, ha az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor az A mátrix reguláris.

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: A reguláris, van egyértelmű inverze: A^{-1} , ezzel:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I_n x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

$\Leftarrow$: TFH., $Ax=b$ -nek egyértelmű megoldása d . Ez azt jelenti, hogy az $[A \ : b]$ kibővített mátrix redukált lépcsős alakja $[E_n \ : d]$, amit az elemi sorműveletekkel kaptunk. Ez azt jelenti, hogy ugyanazokat a az elemi sorműveleteket az $[A \ : E_n]$ kibővített mátrixra alkalmazva, az $[E_n \ : D]$ redukált lépcsős alakot kapjuk, ahol D az A mátrix inverze..

Példa: Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$