

Homogén lineáris leképezés mátrixa

Homogén lineáris leképezések mátrixa

Volt: ha $A : V_1^n \rightarrow V_2^k$ (a felső indexek a dimenziót jelölik) és $\underline{A} \in T^{k \times n}$

$\mathcal{A}(x) = \underline{y} := \underline{A} \cdot \underline{x}$, akkor $\mathcal{A} \in \text{HOM}(V_1^n, V_2^k)$

Most: $\forall \mathcal{A} \in \text{HOM}(V_1^n, V_2^k)$ -hez $\exists \underline{A} \in T^{k \times n}$, hogy $\underline{y} = \mathcal{A}[\underline{x}] = \underline{A} \cdot \underline{x}$

amennyiben V_1^n, V_2^k bázisait rögzítjük, ez az $\underline{A}$ mátrix **egyértelmű**. Ha hangsúlyozni

akarjuk, mely bázispárhoz tartozó $\underline{A}$ mátrixról van szó, akkor ezt így jelöljük: $\underline{A}_{[[a][b]]}$, ahol $[a] = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & V_1^n \text{ bázisa} & \\ \underline{A}_{[ab]} & [b] = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} & V_2^k \text{ bázisa,} \end{array}$$

az $\underline{A}$ mátrix a **leképezés mátrixa**

Tétel: az $\forall \mathcal{A} \in \text{HOM}(V_1^n, V_2^k)$ leképezés mátrixa $\underline{A}_{[[a][b]]} = [\underline{K}_1, \underline{K}_2, \dots, \underline{K}_n]$,

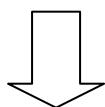
ahol $\underline{K}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(\underline{a}_i)$

az $\underline{A}$ leképezés mátrixa az $[a] \in V_1^n, [b] \in V_2^k$ bázispárra vonatkozóan az a $(K \times N)$ -es mátrix, melynek oszlopvektorai az $[a]$ bázis vektorainak képei.

példa: $y=x$ egyenesre tükrözés
($\underline{x}$ képe $\underline{y}$ és vice versa)

$$\underline{i} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{[i,j,k]}$$

$$\underline{j} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{[i,j,k]}$$



$$\underline{A}_{[i,j,k]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ tényleg! } \mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{A} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Homogén lineáris leképezés mátrixa

példa: vetítés: $R^3 \rightarrow R^3$ (merőlegesen x,y síkra)

$$\underline{i} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} \text{ képe } \underline{k} = 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + 0 \cdot \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

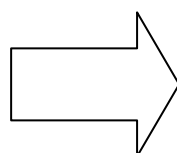
$$\underline{A}_{[i,j,k]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

példa: vetítés: $R^3 \rightarrow R^2$ (merőlegesen x,y síkra)

$$\underline{i} \text{ képe } \underline{i} = 1 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{j} \text{ képe } \underline{j} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k} \text{ képe } \underline{0} = 0 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Homogén lineáris leképezés mátrixa

Bizonyítás: Konstruktív, meg is adjuk a kérdéses mátrixot:

V_1^n BÁZISA: $a_1, \dots, a_n$

V_2^k BÁZISA: $b_1, \dots, b_k$ (ai INDEXE LESZ AZ OSZLOPINDEX)

$$\mathcal{A}(a_1) = \beta_{11}b_1 + \beta_{21}b_2 + \dots + \beta_{k1}b_k \in V_2^k$$

$$\mathcal{A}(a_2) = \beta_{12}b_1 + \beta_{22}b_2 + \dots + \beta_{k2}b_k \in V_2^k$$

.

..

$$\mathcal{A}(a_n) = \beta_{1n}b_1 + \beta_{2n}b_2 + \dots + \beta_{kn}b_k \in V_2^k$$

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \in V_1^n$$

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) \in V_2^k$$

$$\mathcal{A}(x) = \alpha_1 \mathcal{A}(a_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(a_2) + \dots + \alpha_n \mathcal{A}(a_n)$$

$$\mathcal{A}(x) = \alpha_1 (\beta_{11}b_1 + \beta_{21}b_2 + \dots + \beta_{k1}b_k) + \alpha_2 (\beta_{12}b_1 + \beta_{22}b_2 + \dots + \beta_{k2}b_k) + \dots +$$

$$+ \alpha_n (\beta_{1n}b_1 + \beta_{2n}b_2 + \dots + \beta_{kn}b_k) =$$

$$= (\beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \dots + \beta_{1n}\alpha_n)b_1 + (\beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 + \dots + \beta_{2n}\alpha_n)b_2 + \dots +$$

$$+ (\beta_{k1}\alpha_1 + \beta_{k2}\alpha_2 + \dots + \beta_{kn}\alpha_n)b_k$$

EZEK AZ ÚJ KOORDINÁTÁK

HOGYAN LEHET VALAMELY VEKTOR ÚJ KOORDINÁTÁIT KISZÁMÍTANI?

A β_{kn} EGYÜTTHATÓKAT MÁTRIXBA RENDEZZÜK ÚGY, HOGY A MÁTRIX i . OSZLOPA A KIINDULÁSI TÉR i . BÁZISVEKTORÁNAK KÉPVEKTORA LEGYEN (A KÉPTÉR BEN).

AZ ÍGY KAPOTT MÁTRIX A LEKÉPEZÉS MÁTRIXA A MEGADOTT BÁZISOKRA VONATKOZÓAN. RÖGZÍTETT BÁZISPÁRRA EZ EGYÉRTELMŰ. EZZEL A MÁTRIX-SZAL SZOROZVA A VEKTOR EREDETI KOORDINÁTÁIT, MEGKAPJUK AZ ÚJAKAT. EREDETI KOORDINÁTÁK V_1^n -BEN ÚJ KOORDINÁTÁK V_2^k -BAN

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \beta_{k3} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{[b]}$$

↑
LEKÉPEZÉS MÁTRIXA (* a szokásos mátrix szorzást jelenti.)

Homogén lineáris leképezés mátrixa

Megjegyzés:

Most hogy tudjuk, minden leképezést megadhatunk egy mátrix segítségével, a képtérrel kapcsolatban célszerű a leképezést reprezentáló mátrix szorzást úgy tekinteni, mint a leképezés mátrixa oszlopvektorainak lineáris kombinációját:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \beta_{k3} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{13}\alpha_3 + \dots + \beta_{1n}\alpha_n \\ \beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_3 + \dots + \beta_{2n}\alpha_n \\ \dots \\ \beta_{k1}\alpha_1 + \beta_{k2}\alpha_2 + \beta_{k3}\alpha_3 + \dots + \beta_{kn}\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \dots \\ \beta_{k1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \dots \\ \beta_{k2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \dots \\ \beta_{k3} \end{bmatrix} \alpha_3 + \dots + \begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \dots \\ \beta_{kn} \end{bmatrix} \alpha_n$$

Tehát ezen oszlopvektorok generátuma a képtér. Azonban a képtér megadásához bázist kell biztosítani, tehát e generátorrendszerből ki kell választani egy alkalmas bázist.

Tétel: Tegyük fel, hogy egy $V^n \rightarrow V^n$ homogén lineáris transzformáció (különböző sajátértékekhez tartozó) sajátvektorai bázist alkotnak. Ekkor a transzformáció mátrixa e bázisra vonatkozóan diagonális, és a főátlóban rendre a megfelelő sajátértékek állnak.

Bizonyítás:

A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Sajátvektor képe önmaga sajátértékszerese. Pl. az i . sajátvektor, s_i mátrixos alakja a sajátértékek bázisában egy olyan oszlopvektor, amelynek i . koordinátája λ_i , összes többi koordinátája pedig nulla:

$$\mathcal{A}[\underline{s}_i] = \lambda_i \cdot \underline{s}_i = 0 \cdot \underline{s}_1 + 0 \cdot \underline{s}_2 + 0 \cdot \underline{s}_3 + \dots + \lambda_i \underline{s}_i + \dots + 0 \cdot \underline{s}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \end{bmatrix}_{[s]}$$

Ezek az oszlopvektorok alkotják a leképezés mátrixát: az első oszlopnak az első, a második oszlopnak a második, az i . oszlopnak az i . pozícióján áll a megfelelő sajátérték, ezért a mátrix valóban diagonális lesz.

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \beta_{k3} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \beta_{13}\alpha_3 + \dots + \beta_{1n}\alpha_n \\ \beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 + \beta_{23}\alpha_3 + \dots + \beta_{2n}\alpha_n \\ \dots \\ \beta_{k1}\alpha_1 + \beta_{k2}\alpha_2 + \beta_{k3}\alpha_3 + \dots + \beta_{kn}\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \dots \\ \beta_{k1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \dots \\ \beta_{k2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \begin{bmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \dots \\ \beta_{k3} \end{bmatrix} \alpha_3 + \dots + \begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ \dots \\ \beta_{kn} \end{bmatrix} \alpha_n$$