

Homogén lineáris leképezések (=lineáris leképezések) (gyakorlaton lesz hasonló feladat)

A lineáris leképezés olyan **függvény**, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete vektortér, és két speciális tulajdonsággal rendelkezik. A homogén lineáris leképezések nélkülözhetetlenek a száámítógépes grafikában, és ezáltal egy sor más mérnöki alkalmazásban is, pl. repülőgépek tervezése, molekula modellezés.

Definíció:

Legyenek V és W vektorterek, valamint $u, v \in V, k \in R$. Azt az $L: V \rightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, lineáris leképezésnek nevezzük.

(a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$.

(b) $L(ku) = kL(u)$.

Ha $V=W$, akkor a leképezést **lineáris transzformációnak** hívjuk.

Az $L(u)$ vektor az u vektor képe. (Az $L(u)$ vektor **őse** az u vektor)

Az alábbi példákban szereplő leképezésekről döntse el, hogy lineárisak-e.

Példák:

1. **Vetítés:** $L : R^3 \rightarrow R^2$, $L \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Megoldás:

Az a.) b.) tulajdonságokat kell bizonyítani:

(a) $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$

$$L(u+v) = L \left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = L \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) + L \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = L(u) + L(v).$$

(b) $k \in R$,

$$L(ku) = L\left(\begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = kL\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = kL(u).$$

2. **Nyújtás:** $L_1 : R^3 \rightarrow R^3$

$$L_1(u) = L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, \quad r > 1.$$

Zsugorítás: $L_2 : R^3 \rightarrow R^3$

$$L_2(u) = L_2\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = r \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = ru, \quad 0 < r < 1 \Rightarrow L_1 \text{ és } L_2 \text{ lineáris transformációk.}$$

3. Forgatások (elemi úton kiszámolva):

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad r = \|u\|. \quad x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x' &= r \cos(\theta + \phi) = r \cos(\theta) \cos(\phi) - r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ y' &= r \sin(\theta + \phi) = r \sin(\theta) \cos(\phi) + r \cos(\theta) \sin(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad x' &= x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ y' &= x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$L: R^2 \rightarrow R^2$$

$$L(u) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

4. **Mátrix-szal való szorzás:** A legyen $m \times n$ mátrix.

$$L : R^n \rightarrow R^m$$

$$L(u) = L \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = Au$$

(a) $u, v \in R^n$,

$$L(u + v) = A(u + v) = Au + Av = L(u) + L(v).$$

(b) $k \in R$,

$$L(ku) = A(ku) = k(Au) = kL(u).$$

Azt is a későbbiekben bizonyítjuk majd, hogy **minden** homogén lineáris leképezést meg lehet adni alkalmas **mátrix-szal való szorzással**. (E mátrixot a **leképezés mátrixának** nevezzük majd.)

5. Jelöljük P_n -nel az összes, legfeljebb n -edfokú polinomok halmazát.

Megoldás:

$$L: P_2 \rightarrow P_1, L(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 + a_1)x + a_0,$$

(a) $u = a_2x^2 + a_1x + a_0, v = b_2x^2 + b_1x + b_0$ legyenek P_2 -beli polinomok

$$\begin{aligned} L(u+v) &= L((a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)) \\ &= [(a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)]x + (a_0 + b_0) \\ &= [(a_2 + a_1)x + a_0] + [(b_2 + b_1)x + b_0] \\ &= L(a_2x^2 + a_1x + a_0) + L(b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= L(u) + L(v) \end{aligned}$$

(b) $k \in R$,

$$\begin{aligned}
 L(ku) &= L(k(a_2x^2 + a_1x + a_0)) = L(ka_2x^2 + ka_1x + ka_0) \\
 &= (ka_2 + ka_1)x + ka_0 = k[(a_2 + a_1)x + a_0] \\
 &= kL(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\
 &= kL(u)
 \end{aligned}$$

6. $L: P_n \rightarrow P_{n-1}$, L a deriválás.

Megoldás:

(a) $u = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, v = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in P_n$,

$$\begin{aligned}
 L(u+v) &= L((a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)) \\
 &= n(a_n + b_n)x^{n-1} + (n-1)(a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-2} + \dots + (a_1 + b_1) \\
 &= [na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1] + [nb_nx^{n-1} + (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_1] \\
 &= L(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) + L(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0) \\
 &= L(u) + L(v)
 \end{aligned}$$

(b) $k \in R$,

$$\begin{aligned} L(ku) &= L(ka_n x^n + ka_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ka_0) \\ &= nka_n x^{n-1} + (n-1)ka_{n-1} x^{n-2} + \cdots + ka_1 \\ &= k[n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1] \\ &= kL(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= kL(u) \end{aligned}$$

Példa arra, hogy egy leképezés NEM lineáris:

Legyen $L : R^3 \rightarrow R^2$, és
$$L \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

L nem lineáris leképezés, mert

$$(a) \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

$$L(u+v) = L \left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} u_1 u_2 + v_1 v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = L \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right) + L \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \right) = L(u) + L(v)$$

Így a b.) tulajdonságot már nem is kell vizsgálni.

A definíció egy fontos következménye:

Feladat: Bizonyítsa be, hogy valamely L leképezés akkor és csak akkor homogén lineáris, ha

$$L(k_1u + k_2v) = k_1L(u) + k_2L(v)$$

Feladat:

$\mathbb{R}^n$ bármely $\underline{v}$ vektorához rendeljük hozzá $\underline{v}^* = A\underline{v}$ vektort, ahol az A egy $n \times n$ -es mátrixot jelöl. Hogyan lehet megtalálni azokat a vektorokat, melyeknek képe párhuzamos önmagával?

Megoldás:

Rendezve a mátrix egyenletet, az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$Ax = \lambda x = (\lambda E)x \Leftrightarrow (\lambda E)x - Ax = (\lambda E - A)x = 0$$

Ennek csak akkor lesz triviálistól különböző megoldása, ha a $(\lambda E - A)$ együttható mátrixban a GAUSS elimináció befejezésekor az utolsó sorban csupa nulla lesz, ebből a λ -k kiszámolhatók. Visszahelyettesítéssel kapjuk a keresett vektorokat.

Definíció: A λ szám sajátértéke az L **transzformációnak**, ha van olyan NEM NULLA vektor, amelyre

$$L(x) = \lambda x.$$

Ez a **nem nulla x vektor** az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektora.

Példa: A transzformációt a mátrixával adjuk meg, legyen az A .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ha $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, akkor $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3x$.

Igy $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ a $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Ha $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2x$

Vagyis $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Feladatok:

- Számolás nélkül keressük meg a síkban valamely tengelyre vonatkozó tükrözés sajátvektorait!
- Számolás nélkül keressük meg a síkban valamely pont körül való elforgatás sajátvektorait!

Példa sajátvektor kiszámítására síkbeli transzformáció esetén:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

TFH. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sajátvektor:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda x = (\lambda E)x \Leftrightarrow (\lambda E)x - Ax = (\lambda E - A)x = 0.$$

$$(\lambda E - A)x = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gauss eliminációval:

$$\lambda = 2 \quad \text{vagy} \quad \lambda = 3$$

1. Ha $\lambda = 2$,

$$Ax = 2x = 2Ex \Leftrightarrow 2Ex - Ax = (2E - A)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \neq 0, t \in \mathbb{R}.$$

2. Ha $\lambda = 3$,

$$Ax = 3x = 3Ex \Leftrightarrow 3Ex - Ax = (3E - A)x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad r \neq 0, r \in R.$$

Definíció: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összességét L -ben, amelyek képe a nullvektor, a leképezés magterének nevezzük, és $\text{Ker}(L)$ -lel jelöljük

Ker =Kernel, mag

Feladat: Bizonyítsa be, hogy a magtér soha nem üres!

Lemma: A V -beli null vektor képe a W -beli nullvektor.

Tétel: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés R felett. Bizonyítsa be, hogy $\text{Ker}(L)$ altere V -nek.

Definíció: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés R felett. Azon vektorok összességét W -ben, amelyek valamely V -beli vektor(ok) képei, a leképezés képterének nevezzük, és $\text{Im}(L)$ -lel jelöljük

Im =Image, kép

Tétel: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés R felett. Bizonyítsa be, hogy $\text{Im}(L)$ altere W -nek.

Ez a tétel azt mondja ki, hogy a lineáris leképezésnek, mint függvénynek az értékkészlete is vektortér, a W -beli $+$ -ra és az R -beli számszorosra nézve.

Dimenzió tétel: Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. $\dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)) = \dim(V)$
Bizonyítás később.