

Hasonló mátrixok, diagonalizálás

A diagonalizálás azt jelenti, hogy keresünk egy olyan bázist, amelyre áttérve a transzformáció mátrixa diagonális.

Definíció: Az A kvadratikus mátrix hasonló a D kvadratikus mátrixhoz, ha létezik egy olyan S (invertálható, kvadratikus) mátrix, amelyre: $D = S^{-1}AS$.

Hasonló transzformációk tulajdonságai:

Reflexív, szimmetrikus, tranzitív biz.

Definíció: Az A kvadratikus mátrix **diagonalizálható**, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: Diagonalizálhatóság elégséges feltétele (nem szükséges: ld. példák!) Ha valamely A kvadratikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Tétel: Az A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha sajátvektorai bázist alkotnak.

Biz.:

1. Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor áttérve a sajátvektorok bázisára e

$$\text{sajátbázisban az } \underline{s}_j \text{ bázisvektor képe } A(\underline{s}_j) = \lambda_j \underline{s}_j = 0\underline{s}_1 + 0\underline{s}_2 + \dots + \lambda_j \underline{s}_j + \dots + 0\underline{s}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}$$

A transzformáció mátrixának e vektorok az oszlopai. Sorrendhelyesen beírva, valóban olyan diagonális mátrixot kapunk, melynek főátlójában rendre az 1., 2., ...n.-dik sajátvektorhoz tartozó sajátértékek állnak.

2. Ha az A mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor azt fogjuk bizonyítani, hogy a diagonális mátrix elemei A sajátértékei, és S elemei az A mátrix sajátvektorai. Az, hogy ezen utóbbiak bázist alkotnak, abból következik, hogy a mátrixuk, S inverze létezik, így $\det(S) \neq 0$, vagyis a vektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, csak azt kell bizonyítani, hogy S oszlopai valóban a sajátvektorok.

Legyen $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, $S = [\underline{s}_1 | \underline{s}_2 | \underline{s}_3 | \dots | \underline{s}_n]$ akkor a hasonlóság képletéből kiindulva:

$$D = S^{-1}AS \quad \text{*S balról}$$

$$SD = AS$$

Felírva a bal és jobboldali mátrix szorzásokat, és a mátrixokat az oszlopvektoraikkal reprezentálva a fenti jelölésekkel kapjuk:

$$\begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \underline{s}_3 & \dots & \underline{s}_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \underline{s}_3 & \dots & \underline{s}_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \lambda_1 \underline{s}_1 & \lambda_2 \underline{s}_2 & \lambda_3 \underline{s}_3 & \dots & \lambda_n \underline{s}_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & \dots & | \\ \underline{As}_1 & \underline{As}_2 & \underline{As}_3 & \dots & \underline{As}_n \\ | & | & | & \dots & | \end{bmatrix}$$

A két mátrix egyenlőségéből $\underline{As}_i = \lambda_i \underline{s}_i$, tehát a diagonális mátrix elemei valóban a sajátértékek, az áttérési mátrix elemei pedig a hozzátartozó sajátvektorok. Ahhoz, hogy e sajátvektorok bázist alkossanak, elegendő, ha függetlenek, hiszen n db vektorról van szó. A függetlenség abból következik, hogy az S^{-1} mátrix létezik, vagyis $\det(S) \neq 0$.

Tétel: Ha valamely A ($n \times n$) típusú mátrix sajátértékei által meghatározott alterek (az ún. *sajátalterek*) dimenzióinak összege éppen n , akkor a mátrix diagonalizálható.

Pontosabban: ha mindegyik sajátértékre igaz, hogy az általa meghatározott *altér dimenziója (amit geometriai multiplicitásnak is neveznek) egyenlő az algebrai multiplicitásával*, akkor a mátrix diagonalizálható.

Emiatt a feladat megoldásban célszerű először a többszörös multiplicitású sajátértékekhez tartozó alterek dimenzióját megvizsgálni.

Megjegyzés: Ha adott mátrixokról kell eldönteni, hasonló-e, számolhatunk a

$SD=AS$ képlettel is.

Példa: Diagonalizálja az alábbi A mátrixot!

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ ennek sajátértékei: } 5, 4 \text{ az ezekhez tartozó sajátvektorok rendre: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítve a fenti képletbe: $A = S D S^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát, a $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix hasonló az $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixhoz.

Példa: Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Ha igen, adja meg a hozzá hasonló diagonális mátrixot!

Megoldás:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$, a sajátértékek: $\lambda = 2$ kétszeres multiplicitással, $\lambda = 1$, egyszeres multiplicitással.

Visszahelyettesítve a

$\det(A - \lambda I)\underline{x} = 0$ egyenletbe, kapjuk a sajátvektorokat:

$$\lambda = 1\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2\text{-re: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ és } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eszerint a $\lambda = 2$ -höz tartozó sajátaltér dimenziója 2, ez egyezik az algebrai multiplicitással, így a mátrix diagonalizálható.

Összefoglalva:

Az $(n \times n)$ -es A mátrix diagonalizálása:

1. A sajátértékek kiszámításához meg kell oldanunk a karakterisztikus egyenletet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

2. Ennek gyöktényezős alakját tekintve:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$$

A λ_i sajátvektorok (lehetnek komplexek is!) algebrai multiplicitása n_i

3. Mindegyik sajátértékhez megkeressük a hozzá tartozó sajátvektort, vagyis megoldjuk a következő egyenletet:

$$\det(A - \lambda_k I)\underline{x}_k = 0$$

A kapott $\underline{x}$ vektort megpróbáljuk maximális számú független vektor összegeként előállítani:

$$\underline{x}_k = c_{1k}\underline{x}_{1k} + c_{2k}\underline{x}_{2k} + \dots + c_{nk}\underline{x}_{nk}$$

n_k tehát a λ_k sajátértékhez tartozó altér **dimenziója, másképpen a sajátérték geometriai multiplicitása**. Az $\underline{x}_{jk}$ vektorok is sajátvektorok, amint az könnyen ellenőrizhető.

4. Ha $\sum n_{kj} = n$, akkor a mátrix diagonalizálható, és a hozzá hasonló A' mátrix az alábbi képlettel számolható:

$$A' = S^{-1}AS,$$

ahol S a sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrix. Az A' diagonális mátrix diagonálisában a sajátértékek állnak, olyan sorrendben, ahogyan a hozzájuk tartozó sajátvektorokat a mátrixba beírtuk, tehát az i . oszlopban a fődiagonálisban az S mátrix i . oszlopvektorában álló sajátvektort meghatározó sajátérték áll.

Az A mátrix tehát hasonló az A' diagonális mátrixhoz, mert: $A = S A' S^{-1}$

Megjegyzés: Nyilvánvaló, ha mindegyik sajátérték különböző, akkor algebrai multiplicitása 1, és mivel a sajátvektorok nem lehetnek nullvektorok, ezért ez egyezik geometriai multiplicitásukkal, tehát a mátrix diagonalizálható.

5. Ha valamelyik sajátaltér dimenziója nem egyezik meg a sajátérték algebrai multiplicitásával, akkor a mátrix **nem** diagonalizálható (de szebb, ún. Jordán alakra hozható)

Példa: Diagonalizálja a köv mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(-2-\lambda).$$

$\lambda = -1$:

$$(A + I_n)X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}.$$

Ez a $-y + z = 0$ -val ekvivalens:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 2I_n)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -2$ sajátértékhez tartozó (oszlop)vektort írjuk előre, akkor viszont:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A diagonalizálással a mátrixok hatványai (pl. köbe, köbgyöke alább) könnyen kiszámítható, ami a dinamikai rendszerekkel kapcsolatos számításokat jelentősen megkönnyíti.

$$A = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$B = P \begin{pmatrix} -2^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$B^3 = A.$$

Vagyis **B** a köbgyöke **A**-nak.

Példa nem diagonalizálható mátrixra (az indító példához hasonló, másképpen megoldva):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{matrix} 0x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez nem írható fel **két** független vektor összegeként, tehát ez a mátrix nem diagonalizálható. Másképpen: A geometriai multiplicitás (a sajátaltér dimenziója (1) nem egyenlő az algebrai multiplicitással (2))

Példa nem diagonalizálható mátrixra:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ha **A** diagonalizálható lenne, akkor (**I**:= identitás mátrix, egységmátrix):

$$A - \lambda I_n = P^{-1}DP - \lambda I_n = P^{-1}DP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(D - \lambda I_n)P,$$

Vagyis

$$A - \lambda I_n \quad \begin{matrix} \text{hasonló} \\ \text{lenne} \end{matrix} \quad D - \lambda I_n$$

ami azt jelenti, hogy **A** és **D** sajátértékei egyenlők. Az **A** sajátértékei a diagonálisában állnak, egyetlen sajátértéke tehát a (2 multiplicitású) 2. Ezért az **D** mátrix, amihez az **A** hasonló lehet, az csak a **2I** mátrix lehet:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Ekkor $A = P^{-1}DP = 2I_2$, lenne, ami pedig nem igaz.

Egy komplex (sajátérték) példa:

Diagonalizálja az alábbi A mátrixot!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A sajátvektorok:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Házi feladat: Diagonalizálás segítségével számítsa ki az A mátrix harmadik hatványát!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$