

Determinánsok (jegyzet részlete)

Kifejtési tétel (definíció):

Egy n -edrendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejthető, és

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} .$$

A determináns tulajdonságai

1. Ha a determináns valamely sorát λ -val szorozzuk, a determináns az eredeti λ -szorosa lesz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det(A)$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon a_k sor szerint, amelyet λ -val beszoroztunk.

$$\det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \lambda \cdot a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \det \mathbf{A}.$$

2. A determináns i -edik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első i -edik sorában az összeg első tagjai, a második determináns i -edik sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan. (Mivel az összeadás kommutatív művelet, tulajdonképpen nem fontos, hogy rendre az első, ill. a második tagokat tegyük e determinánsokba, csak az a lényeg, hogy az összeg egyik tagját az elsőbe, másikat a másodikba tegyük)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben az összeg szerepel.

$$\det A = \sum_{j=1}^n (b_{ij} + c_{ij}) \cdot D_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot D_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} D_{ij}.$$

3.Ha egy determináns egy sora csupa 0 elemet tartalmaz, akkor a determináns 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst a csupa 0 elemet tartalmazó sor szerint:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n 0 \cdot D_{ij} = 0.$$

Feladat: Bizonyítsa be e tulajdonságot az 1. tulajdonság alapján!

4. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1)-szerezére változik.

Bizonyítás: Először két szomszédos sor cseréjére igazoljuk az állítást. Két tetszőleges sor cseréjét a szomszédos sorok cseréjével képzeljük el. Cseréljük fel a determináns i . és $(i+1)$. sorát. Az eredeti, és a két sor cseréje után kapott determinánsokat jelöljük D_1 , és D_2 -vel.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & a_{(i+1)3} & \dots & a_{(i+1)n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az első determinánst az i . sora szerint, míg a másodikat az $(i+1)$. sora szerint kifejtve a következőt kapjuk: $D_1 = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij}$ és $D_2 = \sum_{j=1}^n a_{(i+1)j} \cdot (-1) \cdot D_{ij}$ Ebből $D_1 = -D_2$

Ha két tetszőleges sort cserélünk fel, akkor van közöttük valahány sor, legyen ezek száma k . Az alul lévő sort k szomszédos sor cseréjével tudjuk a másik sor alá vinni, ekkor szomszédosak. Ebben a pozícióban felcserélve őket, most az eredetileg felül lévő sor kerül alulra. Ezzel együtt eddig $k+1$ szomszédos csere történt. Ebből a pozícióból, amikor az eredetileg felül lévő sor helyén már a másik sor áll, és alatta pedig ő maga, megint k db szomszédos sor cserével tudjuk az eredetileg felül lévő sort az eredetileg alul lévő helyére mozgatni. Összesen $k+1+k=2k+1$ db szomszédos csere történt, ennyiszer változott (-1) -szeresére a determináns előjele, tehát $(-1)^{2k+1}=-1$ -szerese lett az eredetinek.

5. Ha egy determináns két sora megegyezik, a determináns értéke 0.

Bizonyítás: Cseréljük fel a determinánsban a két egyenlő sort. Ekkor a determináns értéke (-1) -szeresére változik az előző tétel értelmében. Másrészt nem változik, hiszen a két determináns elemei megegyeznek. Ha tehát D a determináns értéke, akkor $D = (-D)$, amiből $D = 0$.

6. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor λ szorosát, a determináns értéke nem változik.

Bizonyítás: Az eredeti és az új determinánst jelöljük D és D_λ -val jelölve

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_\lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda \cdot a_{j1} & a_{i2} + \lambda \cdot a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda \cdot a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_0$$

7. Egy alsó, vagy (felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata. (Gauss elimináció alkalmazhatósága!)

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint, majd a keletkező $(n-1)$ -edrendű alldeterminánst szintén az első sora szerint, és így tovább:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & \cdot \\ \dots & & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots & \cdot \\ \dots & & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

8. Ferde kifejtés tétele: Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény 0.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{kj} = 0 \quad i \neq k$$

Bizonyítás: Ezt a tételt 3 x 3 –as determinánsokra bizonyítjuk. Szorozzuk meg az 1. sor elemeit a 2. sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ha az egyenlőtlenség jelétől jobbra álló, ún. ferde kifejtést nézzük, olyan, mintha a determináns első sora szerint fejtettük volna ki, és az első sorban a második sor elemei állnának. Ha ezen jobboldal szerint rekonstruálnánk a determinánst, annak első és második sor egyenlő lenne, tehát értéke 0.

9. A fent bizonyított 1-8 sorokra megfogalmazott tételek mindegyike oszlopokra is igaz.

Bizonyítás: A fenti bizonyításokban a sorok helyett a megfelelő oszlop szerint kell kifejteni a determinánst.

Cramer-szabály

Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ négyzetes matrix és $D=\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A megoldásban $x_j=D_j/D$, ahol D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D -ben a j -edik oszlop helyére a jobb oldali konstansokat (azaz a $\underline{b}$ vektor komponenseit) írjuk.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2$$

.....

$$\underline{\underline{Ax}} = \underline{b}$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_3$$

Másképpen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Példa: A második, x_2 ismeretlen a Cramer szabály szerint a következőképpen kapható:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Bizonyítás:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad /D_{1i}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad /D_{2i}$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad /D_{ni}$$

Összeadva az összes egyenletet és kiemelve az ismeretleneket, a következő adódik a bal oldalon:

$$x_1(a_{11} D_{1i} + a_{21} D_{2i} + \dots + a_{n1} D_{ni}) + \quad / (1. \text{ oszlop}) * (i. \text{ oszlophoz tartozó aldeterminánsok})$$

$$+ x_2(a_{12} D_{1i} + a_{22} D_{2i} + \dots + a_{n2} D_{ni}) + \quad / (2. \text{ oszlop}) * (i. \text{ oszlophoz tartozó aldeterminánsok})$$

$$+ x_3(a_{13} D_{1i} + a_{23} D_{2i} + \dots + a_{n3} D_{ni}) + \quad / (3. \text{ oszlop}) * (i. \text{ oszlophoz tartozó aldeterminánsok})$$

...

$$+ x_i(a_{1i} D_{1i} + a_{2i} D_{2i} + \dots + a_{ni} D_{ni}) + \quad / (i. \text{ oszlop}) * (i. \text{ oszlophoz tartozó aldeterminánsok})$$

...

$$+ x_n(a_{1n} D_{1i} + a_{2n} D_{2i} + \dots + a_{nn} D_{ni}) = \quad / (n. \text{ oszlop}) * (i. \text{ oszlophoz tartozó aldeterminánsok})$$

$$= x_i \det(A).$$

Az x_i ismeretlen együtthatójára alkalmazva a kifejtési tételt, az $\det(A)$ -val egyenlő. A többi ismeretlen együtthatója a ferde kifejtési tétel miatt a 0.

Az egyenlet jobb oldalán álló előjeles aldeterminánsok az i . oszlophoz tartoznak, és rendre a $\mathbf{b}$ vektor elemeivel vannak megszorozva. Ezért ez egy olyan determináns kifejtése, ahol az i . oszlop a $\mathbf{b}$ vektor:

$$b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + b_3 D_{3i} + \dots + b_i D_{ii} + \dots + b_n D_{ni} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Az állítást ezzel bebizonyítottuk, hiszen:

$$x_i \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Négyzetes mátrix inverze

Definíció: Az A négyzetes mátrix (klasszikus) **adjungáltján** az $\text{adj}(A) = (D_{ki})$ mátrixot értjük.

Például 3×3 típusú mátrix adjungált mátrixa a fenti definíció szerint:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

Példa: Az $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix adjungáltja: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, mert ,

$$D_{11} = 3, D_{12} = -1, D_{21} = -5, D_{22} = 2.$$

2×2 -es mátrix esetén tehát könnyű megkapni az adjungáltját: a főátlóbeli elemek helyet cserélnek, a mellékátlóbeliek előjele ellentétesre változik.

Tétel: Az $\mathbf{A}$ ($n \times n$)-es mátrixot az adjungáltjával jobbról megszorozva az eredmény $\det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n$.

Bizonyítás: A szóbanforgó szorzat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{n2} \\ \vdots & & & \\ D_{1n} & D_{2n} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}) & 0 & 0 \\ 0 & \det(\mathbf{A}) & 0 \\ 0 & 0 & \det(\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

A főátló elemeit a mátrix szorzás szabálya szerint kiszámítva:

$c_{11} = a_{11} \cdot D_{11} + a_{12} \cdot D_{12} + \dots + a_{1n} \cdot D_{1n} = \det(\mathbf{A})$, mert ez az 1. sor szerinti kifejtés.

$c_{22} = a_{21} \cdot D_{21} + a_{22} \cdot D_{22} + \dots + a_{2n} \cdot D_{2n} = \det(\mathbf{A})$, mert ez a 2. sor szerinti kifejtés.

....

$c_{nn} = a_{n1} \cdot D_{n1} + a_{n2} \cdot D_{n2} + \dots + a_{nn} \cdot D_{nn} = \det(\mathbf{A})$, mert ez az n . sor szerinti kifejtés.

A többi elem: $c_{ik} = a_{i1} \cdot D_{k1} + a_{i2} \cdot D_{k2} + \dots + a_{in} \cdot D_{kn} = 0$,

hiszen az i .dik sor elemei rendre a k . sorhoz tartozó aldeteterminánsokkal vannak szorozva: ez az összeg a ferde kifejtés szerint 0.

Tétel: Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$ ahol

$\text{adj}(\mathbf{A}) = (D_{ki})$, az $\mathbf{A}$ mátrix ún. (klasszikus) adjungált mátrixa.

Bizonyítás: Mivel mátrixok szorzása asszociatív, ezért a struktúrákról szóló fejezetben igazoltak szerint pontosan egy inverz létezik. Ha tehát találunk egy olyan mátrixot, melyre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$, akkor ez a $\mathbf{B}$ mátrix nem lehet más, csakis az $\mathbf{A}$ mátrix inverze.

Az előző tétel szerint:

$$\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n$$

Beszorozva az egyenletet az $\frac{1}{\det(\mathbf{A})}$ skalárral az alábbi adódik:

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) \right) = \mathbf{E}_n, \text{ amiből tehát } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$$

Példa:

Az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix adjungáltja $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, determinánása -2. Ezért inverze: $\frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Feladat: Igazolja, hogy a fenti példában megadott inverz helyes!

Példa:

Az $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix adjungáltja: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, determinánása 1. Ezért ebben az esetben az adjungált egyben az inverz is.

Feladat: Igazolja a fenti példában kiszámolt inverz helyességét.

Definíció: A nem nulla determinánsú mátrixok az ún. **reguláris** mátrixok. A nulla determinánsú mátrixok az ún. **szinguláris** mátrixok.

Tétel: Inverz mátrix tulajdonságai VOLT, ism. :

1. Ha az A mátrixnak van inverze, akkor van az inverzének is, és: $(A^{-1})^{-1} = A$
2. Ha az A, B mátrixoknak van inverze, akkor van az inverse az AB mátrixnak is és:
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
3. Ha az A mátrixnak van inverze, akkor van a transzponáltjána is, és:
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
4. Ha C invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni:
 - Ha $AC = BC$ akkor $A = B$
 - Ha $CA = CB$ akkor $A = B$

Ismétlés: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ n dimenziós vektortérbeli vektorok akkor és csak akkor függetlenek ha e vektortokból, mint oszlopokból alkotott mátrix determinánsa nem nulla.

$$\det [(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)] \neq 0$$

Bizonyítás: A függetlenség definíciójából kiindulva: a $\mathbf{0}$ vektor csak triviálisan állítható elő az adott vektorokból:

A megfelelő egyenletrendszer:

Gauss eliminációval:

Két esetet különböztetünk meg:

- Ha $\det(A) = 0$ (vagyis a Gauss elimináció során a főátló utolsó eleme 0), és ekkor $\det(A)$ is 0, hiszen az elimináció során az együttható mátrix determinánsának nulla volta nem változik meg az elemi sorműveletek alkalmazásával. Ekkor VAN nem triviális megoldás, tehát $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok **lineárisan függő** rendszert alkotnak.
- Ha $\det(A) \neq 0$. Ekkor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ miatt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ kell legyen. De akkor a szukcesszív approximációval kapott többi ismeretlen is nulla, hiszen őket mindig a rájuk következőkből kapjuk:

Ekkor tehát **csak a triviális megoldás** létezik, ezért az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Egyszersmint bebizonyosodott a következő tétel is:

Tétel: Az $n \times n$ -es homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van triviálistól különböző megoldása, ha együtthatómátrixának determinánsa nulla.