

DETERMINÁNSOK geometriai jelentését részlegesen már a térvektoroknál vettük.

$$|a_{11}| = a_{11} \quad (\text{szakasz hossza, előjeles})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(két vektor által meghatározott parallelogramma területe, előjeles)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(három vektor által meghatározott paralelepipedon térfogata, előjeles)

Definíció: Az elsőrendű $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ mátrix **determinánsának** nevezzük és $\det A$ -val jelöljük az a_{11} számot

A másodrendű $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mátrix **determinánsának** nevezzük, és $\det A$ -val jelöljük a következő számot:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Definíció: Az n -edrendű $A = (a_{ik})$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó *minormátrixának* nevezzük, és A_{ik} -val jelöljük azt az $(n - 1)$ -edrendű mátrixot, melyet úgy kapunk A -ból, hogy annak i -edik sorát és k -adik oszlopát elhagyjuk.

Feladat: Az $(A_{ik})_{jl}$ vagyis az A mátrix i . sorának és k . oszlopának elhagyásával keletkezett A_{ik} minormátrix j . sorának és l . oszlopának elhagyásával keletkező minormátrixa $(A_{ik})_{jl}$. Mit mondhatunk az $(A_{jl})_{ik}$ minormátrixról?

Definíció: Ha az $(n - 1)$ -edrendű mátrix determinánsát már értelmeztük, az n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának nevezzük a következő számot:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det \mathbf{A}_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} \quad .,$$

D_{ij} az ún. **előjeles aldetermináns**.

A $(-1)^{1+j}$ előjelet tartalmazza az alábbi “determináns”. Ennek formája miatt az előjel kiszámítását szokás úgy is nevezni, hogy az aldeterminánsok az előjelet a “sakktábla szabály” alapján kapják.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \vdots \\ & & & \dots \\ & & & nn \end{vmatrix}$$

Szokás a **determináns értékéről** beszélni. Ekkor magát a hozzárendelést értjük a determináns szó alatt, a benne lévő elemeket, mint mátrixot nézzük. E négyzetes mátrixhoz (és bármelyik négyzeteshez) hozzárendeljük e fenti definícióban szereplő számot. Tehát e

függvénynek a négyzetes mátrixok az értelmezési tartománya, és a szám a függvényértéke. Így ez a függvényérték az, amit a determinánsnak értékének nevezünk.

Definíció: Az a_{ij} elem *előjeles aldeteminánsán* értjük a $D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}_{ij}$ számot. Ezt felhasználva egy n -edrendű $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}, \text{ ami egy determináns 1. sora szerinti kifejtése.}$$

Tehát a determinánst úgy fejtjük ki, hogy valamely sorának minden egyes elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeteminánssal, és az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Feladat: Ellenőrizze, hogy a 2×2 -es determináns a definíció szerinti képlettel számítható.

Kifejtési tétel:

Egy n -edrendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejthető, és

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij}.$$

Feladat:

Egy konkrét 3 x 3-as determinánst fejtsen ki mindegyik sora szerint!

A kifejtési tétel bizonyítása teljes indukcióval (elégségeshez, közepeshez nem kell a bizonyítás).

A bizonyítás lépései:

1. Először azt bizonyítjuk, hogy bármely sor szerint kifejtve ugyanazt a számot kapjuk.
2. Az 1. hez hasonlóan lehet bizonyítani azt, hogy bármely oszlop szerint kifejtve ugyanazt a számot kapjuk.
3. Az 1. és 2. bizonyítások alapja, hogy a kifejtési tételben az $a_{ik}a_{jl}$ szorzatot tartalmazó tagok együtthatóiról belátjuk, hogy egyenlők, tehát mindegy, hogy sor vagy oszlop szerint fejtjük ki a determinánst.

1. Először azt bizonyítjuk, teljes indukcióval, hogy bármely sor szerint kifejtve ugyanazt a számot kapjuk.

$n=1$, re triviális.

$n=2$ -re:

$$\text{Első sor szerinti kifejtés: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot |a_{22}| - a_{12} |a_{21}|$$

$$\text{Második sor szerinti kifejtés: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot |a_{12}| + a_{22} |a_{11}|$$

$$\text{Első oszlop szerinti kifejtés: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot |a_{22}| - a_{21} |a_{11}|$$

$$\text{Második oszlop szerinti kifejtés: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot |a_{21}| + a_{22} |a_{11}|$$

Feltesszük, hogy az $(n-1) \times (n-1)$ –es determinánsra igaz az állítás. Ennek alapján bizonyítjuk, hogy az $n \times n$ -es determinánsra is igaz, hogy bármelyik sora szerint kifejtve ugyanazt a számot kapjuk.

Fejtsük ki a determinánst először az i ., majd a j . sora szerint, $i < j$:

A determináns i . sora szerinti kifejtés:

$$D = \sum_{m=1}^n a_{im} \cdot D_{im} = a_{i1} \cdot D_{i1} + a_{i2} \cdot D_{i2} + \dots a_{ik} \cdot D_{ik} + \dots a_{in} \cdot D_{in}$$

Az $a_{ik}a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag úgy adódik, hogy a D_{ik} al-determinánst az eredeti j . sornak megfelelő (most $j-1$.) sor szerint kifejtjük. (Ezt megtehetjük, hiszen az $(n-1) \times (n-1)$ -es D_{ik} determinánsra teljesül az indukciós feltétel: ezért bármelyik sora szerint kifejtethető.

ha $l < k$:

$$a_{ik} \cdot D_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} (\dots + (-1)^{(j-1)+l} a_{jl} \det((A_{ik})_{jl}) + \dots)$$

vagyis az általános, $a_{ik}a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag:

$$(-1)^{i+k} a_{ik} (-1)^{(j-1)+l} a_{jl} \det((A_{ik})_{jl}) = (-1)^{i+k+j+l-1} a_{ik} a_{jl} \det((A_{ik})_{jl})$$

ha $k < l$

$$a_{ik} \cdot D_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik} (\dots + (-1)^{(j-1)+(l-1)} a_{jl} \det((A_{ik})_{jl}) + \dots)$$

vagyis az általános, $a_{ik} a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag:

$$(-1)^{i+k+j+l-2} a_{ik} a_{jl} \det((A_{ik})_{jl})$$

Most fejtsük ki a determinánst a j . sora szerint.

Az $a_{ik} a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag úgy adódik, hogy a j . sora szerint kifejtett determinánsban szereplő megfelelő aldeterminánst az eredeti i . sornak megfelelő sor szerint kifejtjük:

$$\sum_{m=1}^n a_{jm} \cdot D_{jm} = a_{j1} \cdot D_{j1} + a_{j2} \cdot D_{j2} + \dots + a_{jl} \cdot D_{jl} + \dots + a_{jn} \cdot D_{jn}$$

ha $l < k$

$$a_{jl} \cdot D_{jl} = (-1)^{j+l} a_{jl} \det A_{jl} = (-1)^{j+l} a_{jl} (\dots + (-1)^{i+(k-1)} a_{ik} \det((A_{jl})_{ik}) + \dots)$$

vagyis az általános, $a_{ik}a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag:

$$(-1)^{j+l+i+k-1} a_{jl} a_{ik} \det((A_{jl})_{ik})$$

ha $k < l$

az általános, $a_{ik}a_{jl}$ szorzatot tartalmazó általános tag:

$(-1)^{(j-1)+(l-1)} a_{jl} a_{ik} \det((A_{jl})_{ik})$ ha $k < l$. Mivel $((A_{jl})_{ik}) = (A_{ik})_{jl}$, ezért az $a_{ik}a_{jl}$ általános tag együtthatói ugyanazok minden i, j, k, l természetes számra. Másképpen az i . sor szerinti kifejtés összegének tagjai egyenlők a j . sor szerinti kifejtés tagjaival.

Megjegyzés: Gyakran a determináns definícióját a következőképpen adják meg: (ld. pl. Freud R.: Lineáris algebra): Az $n \times n$ -es mátrixhoz számot rendelhetünk. Ha a hozzárendelt szám az alábbiakban ismertetett szabály szerint történik, akkor ezt a számot az $n \times n$ -es mátrix determinánsának nevezzük. Ezt a számot a következőképpen képezzük: a mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet választunk, és ezeket összeszorozzuk. Ezt minden lehetséges módon elvégezzük, így $n!$ db szorzatot kapunk. E szorzatokat $+$ vagy $-$ előjellel látjuk el aszerint, hogy a sorindexek természetes

sorrendjét követő felírásban az oszlopindexek permutációja páros, vagy páratlan. Az előjellel ellátott szorzatokat összegezve kapjuk a determináns értékét. Képletben:

$$\det(A) := \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$I(\sigma)$ az oszlopindexek inverzióinak száma (inverzió: természetes sorrendtől eltérő.)

Feladat: A determináns alább felsorolt tulajdonágait bizonyítsa be a fenti definíció alapján!

A determináns tulajdonságai

1. Ha a determináns valamely sorát λ -val szorozzuk, a determináns értéke λ -szorosa lesz.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon sor szerint, amelyet beszoroztunk λ -val.

$$\det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n \lambda \cdot a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{ij} = \lambda \cdot \det \mathbf{A}.$$

2. Ha $\det \mathbf{A}$ i -edik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor $\det \mathbf{A}$ felbontható két olyan determináns összegére, melyből az első i -edik sorában az előbb említett összeg első tagjai, a második determináns i -edik sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan. (Mivel az összeadás kommutatív művelet, tulajdonképpen nem fontos, hogy rendre az első, ill. a második tagokat tegyük a determinánsokba, csak az a lényeg, hogy az összeg egyik tagját az elsőbe, másikat a másodikba tegyük)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst azon sora szerint, amelyben az összeg szerepel.

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} + c_i \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot D_{ij} + \sum_{j=1}^n b_{ij} D_{ij}.$$

3. Ha egy determináns egy sora csupa 0 elemet tartalmaz, akkor az értéke 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Bizonyítás: Fejtsük ki a determinánst a csupa 0 elemet tartalmazó sor szerint:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n 0 \cdot D_{ij} = 0.$$

4. Ha egy determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke (-1)-szeresére változik.

Bizonyítás: Elegendő két szomszédos sor cseréjére igazolni az állítást.

Ha ugyanis az i -edik sort a j -edik sorral szeretnénk felcserélni ($j > i$), akkor az i -edik sor ($j - i$) lépésben kerül a j -edik helyére, majd a j -edik ($j - i - 1$) lépésben

vissza az i -edik helyére. Ez összesen $j - i + j - i - 1$ szomszédos sorcserét jelent, azaz az előjel $\left((-1)^{j-i} \right)^{j-i-1} = -1$ szeresére változott.

Egyszerűség kedvéért (az általánosság megszorítása nélkül) tekintsük az első két sor cseréjét. Az eredeti, és az első két sor cseréje után kapott determinánsokat jelöljük D_1 , és D_2 -vel. Így

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel szerint egy determináns bármelyik sora szerint kifejthető, ezért fejtsük ki az első determinánst az első sora szerint, míg a másodikat a második sora szerint. Így

$$D_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot D_{1j}, \quad D_2 = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (-1)^{j-1} D_{1j},$$

amivel az állítást igazoltuk.

5. Ha egy determináns két sora megegyezik, a determináns értéke 0.

Bizonyítás: Cseréljük fel a determinánsban a két egyenlő sort. Ekkor a determináns értéke (-1) -szeresére változik (előző tétel), másrészt nem változik, hiszen a két determináns elemei megegyeznek. Ha tehát D a determináns értéke, akkor $D = (-D)$, amiből $D = 0$.

6. Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor λ szorosát, a determináns értéke nem változik.

Bizonyítás. Az eredeti és az új determinánst jelöljük D_1 , és D_2 -vel. Így

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda \cdot a_{j1} & a_{i2} + \lambda \cdot a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda \cdot a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_0 = D_1$$

7. Egy alsó, vagy (felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.

Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint, majd a keletkező al-determinást szintén az első sora szerint, és így tovább:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & \dots \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Bizonyítás: A kifejtési tételt alkalmazva fejtsük ki a determinánst az első (utolsó) sora szerint, majd a kapott $(n - 1)$ -edrendű determinánst ismét az első sora szerint, stb. Így az állítás nyilvánvaló.

8. Az eddigiekben sorokra megfogalmazott tételek mindegyike oszlopokra is igazak.

Bizonyítás: Az ismert tételek felhasználásával bármelyik determináns átalakítható felső háromszögdeterminánssá. Ezt a főátlóra tükrözve alsó háromszögdeterminánst kapunk. Erre alkalmazva az előbbi tételt az állításhoz jutunk.

9. Ferde kifejtés tétele: Ha egy determináns egy sorának elemeit valamely másik sor elemeihez tartozó al-determinánsokkal szorozzuk akkor az így kapott összeg 0.

Vagyis
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot D_{kj} = 0 \quad i \neq k \text{ esetén.}$$

Ha a determináns kifejtésére vonatkozó képletben az a_{ik} sor elemei helyett pl. az a_{lk} sor elemeit szorozzuk meg rendre a D_{ik} al-determinánsokkal, akkor az így kapott szám nulla. Helyes kifejtés: $\det(A) = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots + a_{1n}D_{1n}$

Ferde kifejtés: $0 = a_{21}D_{11} + a_{22}D_{12} + \dots + a_{2n}D_{1n}$

Bizonyítás(Hf. ált.):

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{33} \end{vmatrix} \neq a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \text{ferde kifejtés:}$$

második sor elemei vannak rendre megszorozva az első sor elemeivel

Ha a másodikként szereplő ferde kifejtést nézzük, olyan, mintha a determináns első sora szerint fejtettük volna ki, és az első sorban a második sor elemei állnának. Ekkor az első és második sor egyenő, tehát a determináns 0.