

a $V \in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vektortér bázisai

b) Adja meg a leképezés mátrixát! (2 pont)

2p $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a leképezés mátrixa $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Elmélet

8. A kicserélési tétel felhasználásával bizonyítsa be, hogy adott vektortérben bármely két bázis elemszáma egyenlő. (2 pont)

2p $| \text{generátorrendszer elemszáma} | \geq | \text{független rendszer elemszáma} |$ (Kicserélési tétel alapján)

A bázis egyben független és generátor rendszer is.

~~Indirekt bizonyítás:~~ Bázis 1, Bázis 2 két tetszőleges bázis

ekkor: $\begin{cases} \text{Bázis 1 egy generátor rendszer} \\ \text{Bázis 2 független rendszer} \end{cases} \Rightarrow | \text{Bázis 1} | \geq | \text{Bázis 2} |$

vagy anélkül: $\begin{cases} \text{Bázis 1 független rendszer} \\ \text{Bázis 2 generátor rendszer} \end{cases} \Rightarrow | \text{Bázis 1} | \leq | \text{Bázis 2} |$

$\Rightarrow$ Bármely 2 bázis elemszáma $\in \mathbb{N}$ $| \text{Bázis 1} | = | \text{Bázis 2} |$

9. Legyen i a T test szorzásra vonatkozó egységelemének az összeadásra vonatkozó inverz eleme. Bizonyítsa be, hogy bármely T feletti vektortérben valamely $\underline{v}$ vektor összeadásra vonatkozó inverze a $\underline{v}$ vektor i -szerese: $\underline{v}^{-1} = i \underline{v}$. (2 pont)

2p - a test szorzásra vonatkoztatott egységeleme legyen: e

- mivel i az inverz eleme, ezért $i + e = e$ (összeadás)

- $E \cdot \underline{v}$ az összeadás egységeleme a vektortérben (egysége) nullvektor

$E \cdot \underline{v} = (i + e) \cdot \underline{v} = i \cdot \underline{v} + e \cdot \underline{v} \quad | + \underline{v}^{-1}$

vegyes disztributivitás miatt

$\underline{v}^{-1} + E \cdot \underline{v} = i \cdot \underline{v} + \underline{v}^{-1} + e \cdot \underline{v}$ $\oplus$ egységelem

az inverz definíciója szerint: $E \cdot \underline{v} = \underline{v}^{-1}$

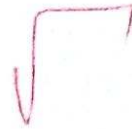
$\underline{v}^{-1} + E \cdot \underline{v} = i \cdot \underline{v} + \underline{v}^{-1} + E \cdot \underline{v}$

$\underline{v}^{-1} = i \cdot \underline{v}$

b) Tekintsük a fenti determináns oszlopvektorait! Bázist alkotnak-e ezek a vektorok $\mathbb{R}^4$ -ben? (Indokolja választát!) (1 pont)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Igen, mivel, ha a determináns $\neq 0$, akkor bázist alkotnak az oszlopvektorok.



6. Alteret alkot-e a $P = \{a + bx + cx^2 \mid a + b + c = 0; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ halmaz a legfeljebb másodfokú polinomok vektorterében? (Az összeadást és a skalárral való szorzást a szokásos módon értelmezzük) Ha alteret alkot a P halmaz, adja meg egy bázisát és az alter dimenzióját! (4 pont)

zárttság összeadásra: $(a + bx + cx^2) + (d + ex + fx^2)$

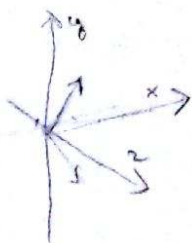
$$= (a+d) + (b+e)x + (c+f)x^2$$

ha $\begin{cases} a+b+c=0 \\ e+f+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+d) + (b+e) + (c+f) = 0 \\ a+d+b+e+c+f = \underbrace{a+b+c}_{=0} + \underbrace{d+e+f}_{=0} = 0 \end{cases}$

skalárszorzásra zárt-e:
 $(\lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \cdot (a + bx + cx^2) = \underbrace{\lambda \cdot a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\lambda \cdot b}_{\in \mathbb{R}} x + \underbrace{\lambda \cdot c}_{\in \mathbb{R}} x^2$ Alteret alkot.
 és $\lambda \cdot a + \lambda \cdot b + \lambda \cdot c = \lambda (\underbrace{a+b+c}_{=0}) = 0 \Rightarrow$ zárt.

7. Legyen az L lineáris leképezés a térbeli x tengely körüli 180° -os forgatás!

a) Adja meg a leképezés sajátértékeit és sajátvektorait! (A leképezés mátrixának felhasználása nélkül!) (3 pont)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

saját vektor:

$\hookrightarrow x$ tengellyel illeszkedő $(x$ tengellyel $\parallel$ -os) nem nullvektorok ezek saját értéke = 1

$\hookrightarrow y$ tengellyel $\parallel$ -os $\neq 0$ vektorok

saját értékeik: -1

$\hookrightarrow z$ tengellyel $\parallel$ -os $\neq 0$ vektorok

saját értékeik: -1



2,5

0,5p

4p

① vegyes disztributivitás

Schäffer Katalin

$$L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \stackrel{?}{=} L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} L\left(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} L a \\ L b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L c \\ L d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} L(a+c) \\ L(b+d) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L a + L c \\ L b + L d \end{pmatrix} \stackrel{(\oplus)}{=} \begin{pmatrix} L a + L c \\ L b + L d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⑥ $a + b x + c x^2$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = -b - c \end{cases}$$

$$-b - c + b x + c x^2 =$$

$$= c(x^2 - 1) + b(x - 1) \rightarrow \text{Bázis: } \{x^2 - 1\} \text{ és } \{x - 1\}$$

✓ 2 dimenziós altér.

b) Határozza meg az előző pontban megadott leképezés mátrixát a kanonikus bázispárban!

(2 pont)

2p $a \vee \in \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bázisa: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4p 5. a) Adja meg az alábbi mátrix determinánsát! (4 pont)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = ? = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -4 & 1 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{I} + \text{II} \\ \text{IV} - 3\text{I} \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{I} \leftrightarrow \text{II}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{IV} - \text{II} \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{IV} + \text{III} \end{array} \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ az eredeti determináns értéke: $-3 \cdot 6 \cdot 2 = -36$

3. 3x3-mas determináns:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -3((-2) \cdot (-13)) - 2(-1) = -84$$

1. 3x3-mas determináns:

$$-2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -2(4+8)$$

2. 3x3-mas determináns:

$$-2 \left(4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$-2(4 \cdot (-13) - 2 \cdot 8) = +136$$

Ell: -123

1. 3x3-mas determináns:

$$-2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -2(4+8)$$

2. 3x3-mas determináns:

$$-2 \left(4 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$-2(4 \cdot (-13) - 2 \cdot 8) = +136$$

3. 3x3-mas determináns:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -3((-2) \cdot (-13)) - 2(-1) = -84$$

b) Adja meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix A^* adjungált mátrixát! Mi az eredmény, ha az A

mátrixot és az A^* adjungált mátrixot összeszorozzuk? Számítsa ki az A mátrix inverzét az adjungált mátrix segítségével is! (3 pont)

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

2,5 p

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

A $\det(A)$ a felsőháromszög
det. kiszámítása alapján:

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

4. a) Bizonyítsa be, hogy az alábbi $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leképezés homogén lineáris! (3 pont)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ y - x + 2z \end{pmatrix}$$

3 p

homogén: $\lambda \cdot L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = L\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$

$\mathbb{R}$ a vektorok az $\oplus$ -ra distributív az $\otimes$ -ra

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ y - x + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda x - 3\lambda z \\ \lambda y - \lambda x + 2\lambda z \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}\right) = L\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

A skálázás $\mathbb{R}$ -re kommutatív

lineáris $L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3z \\ y - x + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a - 3c \\ b - a + 2c \end{pmatrix}$

$$L\left(\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x+a) - 3(z+c) \\ (y+b) - (x+a) + 2(z+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z + 2a - 3c \\ (y - x + 2z) + (b - a + 2c) \end{pmatrix}$$

meggyőző disztributivitás:

$$I) (a+b) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} a \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \rightarrow ((a+b) \cdot a) = \begin{pmatrix} (a+b)a \\ (a+b)b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a + b \cdot a \\ a \cdot b + b \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a + b \cdot a \\ a \cdot b + b \cdot b \end{pmatrix}$$

nem alkot vektortér

2. Adottak $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$II) \lambda \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda c \\ \lambda b + \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda c \\ \lambda b + \lambda d \end{pmatrix}$$

a) Generátorrendszert alkotnak-e a fenti vektorok $\mathbb{R}^3$ -ban? Igen.

b) Legfeljebb hány független vektor választható ki a megadott vektorok közül? Adjon példát kiválasztható független vektorokra!

c) Bázist alkotnak-e a fenti vektorok $\mathbb{R}^3$ -ban? Legfeljebb 3 db, mert 3 dimenziós térben maximum 3 db lineárisan független vektor választható ki.

d) Kiválasztható-e $\mathbb{R}^3$ -nak egy bázisa a fenti vektorok közül? Ha igen, hogyan? Igen

nem alkotnak bázist, mivel maximum 3 db vektor választható ki, de nem 3 db.

5 pont

2	0	6	10	0
-3	1	-4	-13	0
5	-2	5	20	0
2	0	6	10	0
-6	2	-8	-26	0
10	-4	10	40	0
2	0	6	10	0
0	2	10	4	0
0	-4	-20	-10	0
2	0	6	10	0
0	2	10	4	0
0	0	0	-2	0

$\left. \begin{matrix} II + 3I \\ III - 5 \cdot I \end{matrix} \right\}$
 $\left. \begin{matrix} III + 2II \end{matrix} \right\}$

Bázist alkotnak, ha

$$\left\{ \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \right\} \text{ vektorok}$$

(külön-külön 3-3 db)

a) a 4 vektor generátorrendszer, mert 4 vektort bázist alkot.

b) bázis vektorok száma (dimenzió) = a kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számaival.

c) bázist alkot, amelyik sorokban 0-0-0 különböző vesszővel választható

3. a) Adja meg a következő mátrix inverzét a Gauss-Jordan algoritmus segítségével! (2 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$I \cdot II \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{III - I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-3/II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{+I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{III + II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} II - III \\ I + 2III \end{matrix}}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Név: Schäffer Katalin

NEPTUN KÓD: EBQ6CK

CSOPORT: 3.

Σ 35p

2. Zárthelyi dolgozat Lineáris algebra I. tárgyból

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Kis-Tóth Ágnes

Szabó Kornélia

Minden megoldást indokoljon! Csak eredmény közléséért nem jár pont.

1. Írja fel a vektortér axiómákat és ezek alapján döntse el, hogy az $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós vektorok halmaza az alábbi két művelettel vektorteret alkot-e? (4 pont)

4p

a) $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$ (a szokásos összeadás)

b) $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a \\ b \end{bmatrix}$

⊕ - az: - zártóság: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ekkor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

- asszociativitás: $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right)$

$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c+e \\ b+d+f \end{pmatrix}$

- létezik-e egységelem ($\in \mathbb{R}^2$)

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underline{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ha } e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underline{0} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- inverz elem ($\in \mathbb{R}^2$): $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underline{i} = \underline{e} = \underline{0}$

$\underline{i} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- kommutativitás: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

($\lambda, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$)

⊗ - az:

- zártóság: $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ kommutativitás

- egységelem ($\in \mathbb{R}$): $\lambda = 1$, mivel $1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- vegyes asszociativitás: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot (\mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$

$(\lambda \cdot \mu \cdot a) \Leftrightarrow \lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \cdot \mu \cdot a)$