

NEV: Nyíró Balázs

NEPTUN KÓD: C4FVJZ

CSOPORT: 3

23p

Lineáris algebra I - 1. Zárthelyi dolgozat
Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Kis-Tóth Ágnes

Szabó Kornélia

A dolgozat 90 perces, de 120 perc áll rendelkezésre, összesen 40 pont szerezhető.
Válaszát minden esetben indokolja! Indoklás nélküli válaszáért nem jár pont!

1. Az ábrán az AEC szabályos háromszög oldalainak felezőpontjai az F, B, D pontok.

- Mikor mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek? Döntse el, hogy a megadott vektor rendszerek közül melyek tartalmaznak független vektorokat.
- Ha valamelyik vektorrendszer bázist alkot, akkor adja meg a $\overrightarrow{CF}$ vektor koordinátáit az adott bázisban!

(5 pont)

a, $\{ \overrightarrow{CF} \}$

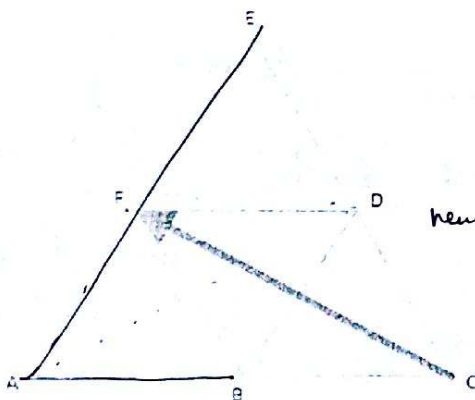
b, $\{ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} \}$

c, $\{ \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BF} \}$

d, $\{ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DF} \}$

e, $\{ \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DF} \}$

f, $\{ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \}$



FÜGGETLENSÉG DEFINÍCIÓJA:

~~A vektor független~~
nem írható fel ~~függősen~~ ~~lineáris~~ ~~vektorok~~ B és C vektorok
kombinációjaként **Alt. def. kéve!**

FÜGGETLENEK AZ ALÁBBIK
(elegendő a betű):

~~d, c~~

BÁZIST ALKOTNAK (elegendő a betű):

~~d, f~~

$\overrightarrow{CF}$ KOORDINÁTÁI:

~~teljesen~~

~~teljesen~~ $\boxed{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}} = \overrightarrow{CF}$

2. Három barát egy szép őszi napon betért a közeli cukrászdába néhány süteményre. A sütemények közül az ekler-fánk, a mignon, a krémes és az isler tetszett meg nekik a legjobban, melyeknek az ára rendre: 300, 150, 250 és 200 Ft volt. Azt, hogy ki melyik süteményből hány darabot rendelt egy mátrixba rendezték. **Mátrix műveletek** segítségével adjon választ a három barátban felmerült kérdésekre! (6 pont)

- a, Hány darab süteményt evett meg fejenként Csabi, Tomi és Patrik?
 b, Összesen hány darab sütit tömtek magukba a fiúk a cukrászdában?
 c, Összesen mennyivel több sütit evett meg Tomi mint Patrik?
 d, Mekkora összeg szerepelt Csabi, Tomi illetve Patrik számláján a fizetésnél?
 e, Csabinak és Patriknak összesen mennyit számolt fel a cukrászda a krémesekért?
 f, Ha azt is tudjuk, hogy Csabi 10%, Tomi 15%, Patrik 20% borraavalót adott, akkor összesen mennyi pénzt hagyott a három barát a cukrászdában?

	Ekler	Mignon	Krémes	Isler
Csabi	4	0	2	3
Tomi	3	1	5	2
Patrik	1	2	3	0

a,

$$\text{Csabi: } 4 + 0 + 2 + 3 = 9 \quad \Sigma [4 \ 0 \ 2 \ 3]$$

$$\text{Tomi: } 3 + 1 + 5 + 2 = 11 \quad \Sigma [3 \ 1 \ 5 \ 2]$$

$$\text{Patrik: } 1 + 2 + 3 + 0 = 6 \quad \Sigma [1 \ 2 \ 3 \ 0]$$

b, 26 db-ot összesen

$$\Sigma \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

c, $11 - 6 = 5$ -tel többet

$$[3 \ 1 \ 5 \ 2] - [1 \ 2 \ 3 \ 0]$$

d,

$$\text{Csabi: } 4 \cdot (300) + 2 \cdot (250) + 3 \cdot (200) = 1300 \text{ Ft}$$

$$\text{Tomi: } 3 \cdot (300) + 150 + 5 \cdot (250) + 2 \cdot (200) = 2700 \text{ Ft}$$

$$\text{Patrik: } 300 + 300 + 3 \cdot 250 + 0 = 1350 \text{ Ft}$$

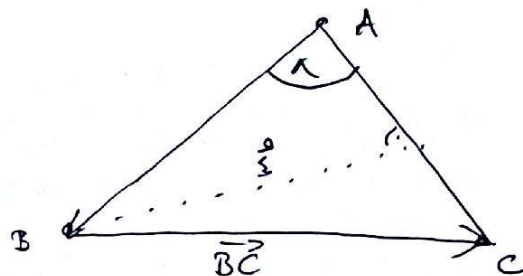
$$e, (2 + 3) \cdot (250) = 1250 \text{ Ft}$$

$$f, 130 + 105 + 270 = 505 \text{ Ft -al}$$

3. Számítsa ki a megadott három pont által meghatározott háromszög

- a. A csúcsnál lévő szögét (3 pont)
b. B csúcsához tartozó magasság vektort. (4 pont)

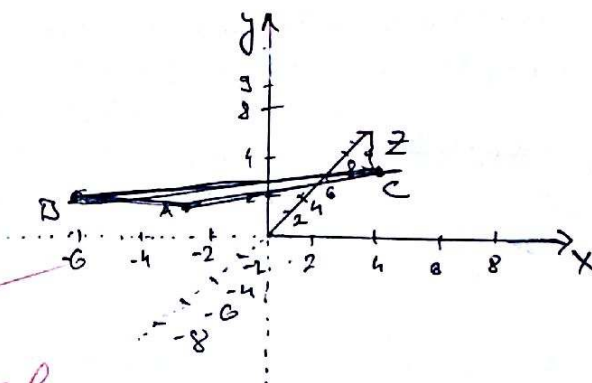
$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$



$$\vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \Rightarrow \sin \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin \frac{3}{7}$$

$$\alpha \approx 25,38^\circ$$

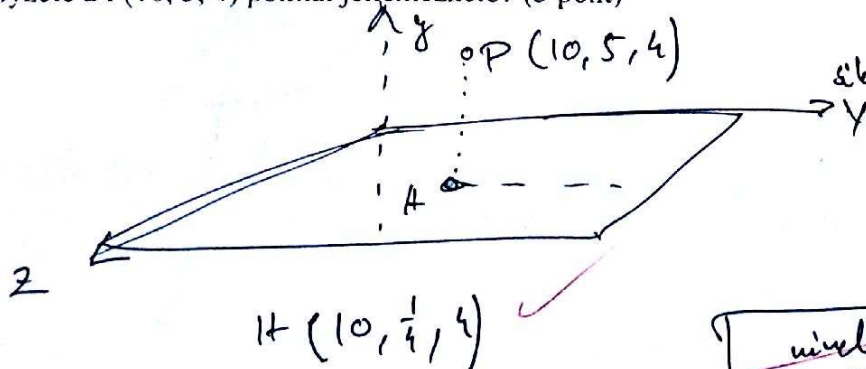


b/ $\frac{mb}{AB} = \sin 90^\circ$ *ez max a hosszakkal le lehet igaz!*

$$AB \cdot \sin 90^\circ = mb$$

$$mb = 7$$

4. Egy helikopter egy irodaház felett lebeg egy helyben. Az irodaház tetején lévő leszállópálya vízszintes síkja az általunk választott koordinátarendszerben a $3x + 4y - 8z = -1$ egyenlettel írható le. Mennyi utat kell megtennie függőlegesen lefelé a helikopternek a leszállás során, ha a jelenlegi helyzete a $P(10, 5, 4)$ ponttal jellemezhető? (3 pont)



$$3 \cdot 10 + 4y - 8 \cdot 4 = -1$$

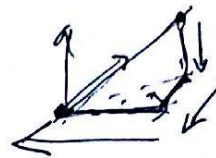
$$4y = 1$$

$$y = \frac{1}{4}$$

$$H(10, \frac{1}{4}, 4)$$

minél lefelé vagy akár a víz az koordinátái nem változnak

$$5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \text{ egy méter kell lefelé repülnie}$$

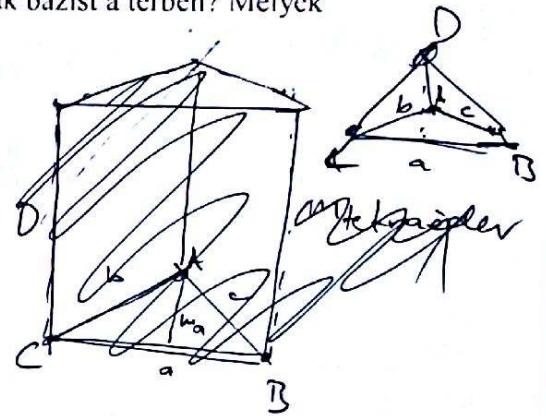


5. Egy gyárban játék építőelemeket készítenek fából. Az egyik gép tetraéder alakú darabokat vág ki fa hasábokból. Tudjuk, hogy egy ilyen tetraéder meghatározható az alábbi csúcs pontokkal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ és } D = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- a, Számítsa ki egy ilyen tetraéder alakú építőelem ABC alapjának területét! (4 pont)
 b, Adja meg az adott koordináta-rendszerben a tetraéder ABC síkjának egyenletét! (2 pont)
 c, Az építőelemeket egy speciális dobozban árulják, melybe pontosan 12 db fér el belőlük. Mennyi ennek a doboznak a térfogata? (2 pont)

- d, Az $\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{CD}\}$ vektorok közül melyek alkotnak bázist a térben? Melyek BIZTOSAN nem alkotnak bázist? Indokolja válaszait! (2 pont)

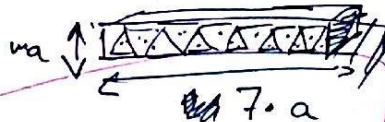


gy

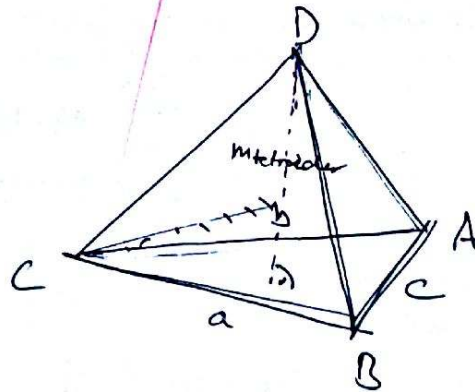
$$\text{alap területe} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

C,

$$\frac{m_a \cdot (7 \cdot a)}{2} \cdot m_{\text{tetraeder}} = \text{térfogat doboz}$$



$\overline{CB} =$



6. Előállítható-e az A mátrix a B és a C mátrixok lineáris kombinációjaként? Ha igen, hogyan? (2 pont)

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

előállítható.

az első sor második (-1)-ese
és a második sor második
kombinációjaként

VÁLASZTHAT AZ ALÁBBI 7. SORSZÁMÚ FELADATOK KÖZÜL! CSAK EGYIKET PONTOZZUK. KARIKÁZZA BE VÁLASZTÁSÁT!

7. Adja meg a mátrix inverzének definícióját! Számítsa ki az alábbi mátrix inverzét! (3 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mátrix inverze meggyeri a mátrix és az egység mátrix szorzatával. jele A^{-1}

Nem isadala, hogy
semmiféle nem lehet!

7. Bizonyítsa be, hogy két vektor skalárszorzata akkor és csak akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek. (3 pont)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{3 : 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{3 : \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3 + r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

8. Bizonyítsa be, hogyha lineárisan független vektorokhoz egy vektort hozzávéve azok lineárisan összefüggővé válnak, akkor a hozzávett vektor kifejezhető az eredeti vektorok lineáris kombinációjával. (4 pont)

op

2. feladat.

d, feladat ~~re~~ mátrixmódszerrel

$$\begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} \cdot [4023] \cdot 300$$

ezzel kapcsolatos?

csabi: $[4023] \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2300 \text{ Ft}}}$

Tomi: $[3152] \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2700 \text{ Ft}}}$

Patkó: $[1230] \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} = \underline{\underline{1350 \text{ Ft}}}$

21

$$250 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$f_1 \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} \right) \cdot 0,1 + \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} \right) \cdot 0,15 +$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 150 \\ 250 \\ 200 \end{bmatrix} \right) \cdot 0,2 = \underline{\underline{305}}$$