

NÉV:

NEPTUN KÓD:

CSOPORT:

Lineáris algebra I. - 2. Zárthelyi dolgozat - A

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Ács Bernadett

Kis-Tóth Ágnes

Szabó Kornélia

Varga Bálint

A dolgozat megírására 90 perc áll rendelkezésre, és összesen 35 pont szerezhető.
Válaszát minden esetben indokolja! Indoklás nélküli válaszért nem jár pont.

1. a. Bizonyítsa be, hogy az alábbi leképezés homogén lineáris leképezés! (2 pont)

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$A(v) = A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_1 \\ v_1 + v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b. Írja le a leképezés mátrixának definícióját! (2 pont)

c. Határozza meg az 1.a. feladatban megadott leképezés mátrixát az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisban! (2 pont)

1.c Ha valamely A leképezés sajátértéke λ , akkor mi lesz a sajátértéke annak a leképezésnek, amelyet A kétszeri alkalmazásával kapunk? (2 pont)

2. Határozza meg az alábbi, geometriailag megfogalmazott lineáris leképezés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat! (4 pont)

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ az yz síkra való tükrözés

3. Adottak az alábbi $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ p^2 \end{pmatrix}$$

a. A p paraméter mely értékei esetén lesznek az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek?

b. $p = 1$ esetén bázist alkotnak-e a vektorok?

c. $p = 2$ esetén generátor rendszert alkotnak-e a vektorok?

d. $p = 3$ esetén hány független vektor választható ki az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok közül?

e. A p paraméter mely értékei esetén lesz az a mátrix, amelynek oszlopai az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok, reguláris?
(5 pont)

4. Az egyetemi menzán minden munkanapon 3 fajta; A, B és C menüt szolgáltatnak fel. Az alábbi mátrix tartalmazza naponként az egyes fajtákból vásárolt mennyiségeket. (A sorok a menü típusoknak, az oszlopok a napoknak felelnek meg.) **Mátrixműveletek segítségével adjon választ az alábbi kérdésekre!** A konkrét számértékeket is adja meg! (5 pont)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 12 & 9 & 13 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Hányan ettek a menzán az egyes napokon?

b. Mennyivel többen ettek az egyes menükből szerdán mint pénteken?

c. Mennyi bevétel származott a hét egyes napjain a menük eladásából, ha azok árait az alábbi mátrix tartalmazza?

$$P = \begin{bmatrix} 800 \\ 700 \\ 750 \end{bmatrix}$$

d. Határozza meg azt a mátrixot, amely nem az eladott menük számát, hanem az eladásokból származó bevételeket tartalmazza (napok és menük szerint)!

e. Mennyi bevétel származott a B menü eladásából a hét folyamán?

5. Az $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ homogén lineáris leképezést a mátrixával adjuk meg. Határozza meg a leképezés sajátértékeit és a legnagyobb abszolút értékű sajátértékhez tartozó sajátvektorokat! (5 pont)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

6.a. Írja le a vektortér axiómákat! (2 pont)

b. Döntse el, hogy a sík vektorai vektorteret alkotnak az alábbi műveletekre, mint összeadásra és skalárral szorzásra nézve! (3 pont)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ 2\lambda a_2 \end{bmatrix}$$

7. Egy lineáris egyenletrendszer együttható mátrixán elvégeztük a Gauss algoritmust:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ez alapján döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás, válaszát indokolja! (3 pont)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3)$$

NÉV:

NEPTUN KÓD:

CSOPORT:

Lineáris algebra I. - 2. Zárthelyi dolgozat - B

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Ács Bernadett

Kis-Tóth Ágnes

Szabó Kornélia

Varga Bálint

A dolgozat megírására 90 perc áll rendelkezésre, és összesen 35 pont szerezhető.
Válaszát minden esetben indokolja! Indoklás nélküli válaszáért nem jár pont.

1. A $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homogén lineáris leképezést a mátrixával adjuk meg. Határozza meg a leképezés sajátértékeit és a legkisebb abszolút értékű sajátértékhez tartozó sajátvektorokat! (5 pont)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- 2.a. Írja le a vektortér axiómákat! (2 pont)

b. Döntse el hogy a sík vektorai vektorteret alkotnak az alábbi műveletekre mint összeadásra és skalárral szorzásra nézve! Indokolja választát! (3 pont)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$$

3. Adottak az alábbi $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ q^2 \end{pmatrix}$$

a. A q paraméter mely értékei esetén lesznek az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineárisan függetlenek?

b. $q = 1$ esetén hány független vektor választható ki az az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok közül?

c. $q = 2$ esetén generátor rendszert alkotnak-e a vektorok?

d. $q = 3$ esetén bázist alkotnak-e a vektorok?

e. A q paraméter mely értékei esetén lesz az a mátrix, amelynek oszlopai az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok, szinguláris?
(5 pont)

4. Egy lineáris egyenletrendszer együttható mátrixán elvégeztük a Gauss algoritmust:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Ez alapján döntse el, hogy igaz-e az alábbi állítás, válaszát indokolja! (3 pont)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-5)$$

5.a. Bizonyítsa be, hogy az alábbi leképezés homogén lineáris leképezés! (2 pont)

$$B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$B(v) = B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$$

b. Adja meg a leképezés mátrixának definícióját! (2 pont)

c. Határozza meg az 1.a. feladatban megadott leképezés mátrixát az L , L , K bázisban! (2 pont)

d. Ha valamely A leképezés sajátértéke λ , akkor mi lesz a sajátértéke annak a leképezésnek, amelyet A háromszori alkalmazásával kapunk? (2 pont)

6. Az egyetemi menzán minden munkanapon 3 fajt, A, B, és C a menüt szolgáltatnak fel. Az alábbi mátrix tartalmazza naponként az egyes fajtákból vásárolt mennyiségeket. (A sorok a menü típusoknak, az oszlopok a napoknak felelnek meg.) **Mátrixműveletek segítségével adjon választ az alábbi kérdésekre! A konkrét számértékeket is adja meg!** (5 pont)

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 6 & 7 \\ 11 & 12 & 9 & 13 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Mennyi fogyott az egyes menü típusokból a hét során?

b. Mennyivel több fogyott a B menüből, mint az A menüből az egyes napokon?

c. Mennyi bevétel származott a hét egyes napjain a menük eladásából, ha azok árait az alábbi mátrix tartalmazza?

$$P = \begin{bmatrix} 800 \\ 700 \\ 750 \end{bmatrix}$$

d. Mennyi volt az egyetemi menza hétfői bevétele?

e. Határozza meg azt a mátrixot, amely nem az eladott menük számát, hanem az eladásokból származó bevételeket tartalmazza (napok és menük szerint)!

7. Határozza meg az alábbi, geometriailag megfogalmazott lineáris leképezés sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat! (4 pont)

$B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ az xz síkra tükrözés