

Diszkrét Matematika I.

gyakorlat jegyzet

Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss eliminációval

v2.0

2008/2009 őszi félév

1. Lineáris algebra

A **diszkrét matematika** [discrete mathematics] tárgy első témaköre a **lineáris algebra** [linear algebra]. Mivel foglalkozik a lineáris algebra? A lineáris szó a latin linearis-ból származik, ami azt jelenti: vonalakból alkotott. Kezdetben elég is ennyi magyarázat. Mit jelent az algebra? A középiskolai tanulmányok során a valós számok rengeteg érdekes tulajdonságára derült már fény. Más szóval ezek a számhalmazok nem pusztán elemek összessége, hanem erős kapcsolat van közöttük: a valós számok valamilyen rendszert alkotnak: a valós számhalmaznak van valamilyen struktúrája. Az algebra ilyen strukturális tulajdonságok együttese. A számokon kívül sok más matematikai elemből alkotott halmaz strukturális tulajdonságát fogjuk vizsgálni: Milyen kapcsolat van az elemeik között? Milyen tulajdonságúak ezek a halmazok?

A félév során a lineáris és a struktúra fogalom köré csoportosítható megközelítőleg az egész tananyag. Pontosan, precízen definiálni fogjuk őket.

2. Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletnek [linear equation] nevezzük azt az egyenletet, ami a következő alakú:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ahol x_i , $i = 1, \dots, n$ az egyenlet ismeretlenek, a_i az x_i ismeretlen együtthatója. Továbbá a_i és b adottak, és n véges, pozitív (nem nulla) egész szám ($n \in \mathbb{N}^+$), azaz az egyenlet véges számú ismeretlent (és együtthatót) tartalmaz. Kezdetben x_i, a_i, b valós számok.

Lineáris egyenletrendszernek [system of linear equations] nevezzük m ($m \in \mathbb{N}^+$) darab lineáris egyenlet együttesét:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

2.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Egy lineáris egyenlet(rendszer) tehát meghatározott kapcsolatot ad meg a benne szereplő ismeretlenek között. Azt is mondhatjuk, hogy egy megoldás olyan számok együttese, amiket a megfelelő(!) ismeretlenek helyébe behelyettesítve az egyenlőség teljesül.

A továbbiakban amikor egyenlet(rendszer)ek megoldásáról beszélünk, az *összes* lehetséges megoldás megkeresését értjük alatta.

2.2. A megoldások száma

2.2.1. Két ismeretlenes lineáris egyenletek megoldásainak száma

Egy két ismeretlenes lineáris egyenlet $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ alakú és ábrázolható a síkon. Ha legfeljebb az egyik együttható (a_1 vagy a_2) értéke 0, akkor egy ilyen egyenlet egy egyenest ad meg. Más szavakkal az ilyen típusú lineáris egyenlet megoldásai egy egyenesen helyezkednek el, és ebből adódóan végtelen sok megoldása van.

Ha mindkét együttható nulla ($a_1 = a_2 = 0$), akkor az egyenlet $0 = b$ alakú, ami ha b értéke nulla, akkor a teljes síkot adja megoldásként (mivel ekkor egyik ismeretlenre sincs semmilyen megkötés), azaz végtelen megoldás létezik. A b nem nulla esetben viszont nyilvánvalóan nincs megoldás.

Két ismeretlenes lineáris egyenletek ábrázolása Az $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ alak helyett használjuk az $y = mx + c$ alakot (könnyen ellenőrizhető, hogy $x = x_1$ és $y = x_2$ behelyettesítésével az átalakítás a következő módon végezhető el: $m = -a_1/a_2$ illetve $c = b/a_2$). Ebből az alakból már könnyen látható, hogy az ábrázolandó egyenes az $y = c$ pontban metszi az y tengelyt ($x = 0$ eset) és egy m meredekségű egyenesről van szó. Ha $a_2 = 0$ az átalakítás nem végezhető el (nullával nem oszthatunk), de ekkor nem is szükséges átalakítani, mivel ha $a_2 = 0$, akkor az egyenlet a következőre egyszerűsödik: $a_1x_1 = b$ vagy másképpen $x_1 = b/a_1$, ami egy y tengellyel párhuzamos, az x tengelyt a b/a_1 pontban metsző egyenes. (A mindkét együttható nulla esetet az előző bekezdésben már megtárgyaltuk.)

2.2.2. Két ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma

Két egyenlet esete Hány megoldása lehet egy két egyenletből álló, két ismeretlenes egyenletrendszernek? Ha meggondoljuk, hogy két egyenes milyen helyzetben lehet egymáshoz képest a síkon, akkor a következő lehetséges eseteket kapjuk:

1. egybe esnek: végtelen megoldás van: a teljes egyenes
2. párhuzamosak: nincs megoldás
3. metszők: egyetlen megoldás van: a metszési pont

Honnét tudjuk eldönteni, hogy mikor melyik eset áll fenn?

1. Két egyenes mikor párhuzamos?
Kizárólag akkor, ha meredekségük megegyezik, ami azt jelenti, hogy létezik olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva a két egyenlet együtthatói azonosak lesznek. (Az előzőekben látható volt, hogy az egyenes meredeksége $-a_1/a_2$ ami nyilván nem változik, ha az egyenletet egy d számmal megszorozzuk: $a_1x_1 + a_2x_2 = b \rightarrow da_1x_1 + da_2x_2 = db$ és ekkor $(-da_1)/(da_2) = -a_1/a_2$)
2. Két egyenes mikor esik egybe?
Kizárólag akkor, ha egyenleteik egymásból átalakíthatóak. Más szavakkal, ha az egyenletek egymásnak számszorosai. Ez speciális esete az előző pontnak, hiszen egybe eső egyenesek tekinthetők 0 távolságra lévő párhuzamos egyeneseknek. Algebrai szempontból is jól látható ez a speciális eset: itt már nem csak a meredekség egyezését követeljük meg, hanem az y tengely metszéspontjának is, azaz a c konstansoknak is meg kell egyezni a megfelelő számmal való megszorítás után. (Számmal való szorzás nyilván nem változtatja meg az y tengellyel való metszéspontot: $a_1x_1 + a_2x_2 = b \rightarrow da_1x_1 + da_2x_2 = db$ és ekkor $c = (db)/(da_2) = b/a_2$)
3. Két egyenes mikor metszi egymást?
Két egyenes a síkon pontosan akkor metszi egymást, ha nem esnek egybe és nem párhuzamosak.

Az előzőekből adódóan ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva a két egyenlet együtthatói azonosak lesznek.

Ne felejtsük el a két ismeretlenes egyenleteknél tárgyalt másik két esetet sem, tehát amikor mindkét együttható és b is nulla illetve amikor mindkét együttható 0 és b nem nulla. Ha bármelyik egyenletre az első eset áll fenn, akkor azt az egyenletet el is hagyhatjuk, hiszen a megoldások számát nem befolyásolja. Ha bármelyik egyenletre a második eset áll fenn, akkor eleve nincs megoldás, tehát teljesen mindegy, hogy a másik egyenlet milyen.

Több, mint két egyenlet esete Ha kettőnél több egyenletből álló egyenletrendszert vizsgálunk, akkor eljárhatunk úgy, hogy két egyenletet kiválasztva megvizsgáljuk a megoldásokat, majd egy újabb egyenlet hozzávételével újra elvégezzük a kiértékelést.

2.2.3. Általános eset

A két ismeretlenes esetben is láthattuk, hogy sok szempontot kell figyelembe venni már ahhoz is, hogy a megoldások számát meghatározzuk. Magukról a megoldásokat pedig még meg sem kerestük. Három és több ismeretlen esetében a helyzet még tovább bonyolódik, szükséges tehát egy egyszerűbb módszert találnunk.

3. Gauss elimináció

Az előző részben láthattuk, elegendő vizsgálni az egyenletekben szereplő együtthatókat és a b konstansokat. Egyszerűsítsük az egyenletrendszer felírási módját:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A továbbiakban a lineáris egyenletrendszer helyett ezt a felírási módot fogjuk alkalmazni, és ezen fogjuk elvégezni a számításokat, módosításokat is, amit **elemi ekvivalens sorműveleteknek** [elementary row operations] nevezünk és az előzőleg tárgyaltak alapján a következők lehetnek:

1. valamelyik sort egy nullától különböző számmal végigszorozunk
2. valamelyik sorhoz egy másik sor számszorosát hozzáadjuk
3. két sort felcserélünk

Ezekkel a számításokkal elvégezhetjük a megoldások számának vizsgálatát, ahogyan azt az előzőekben tettük, ám a Gauss elimináció ezen kívül a megoldásokat is megadja. Az algoritmus az 1. ábrán látható.

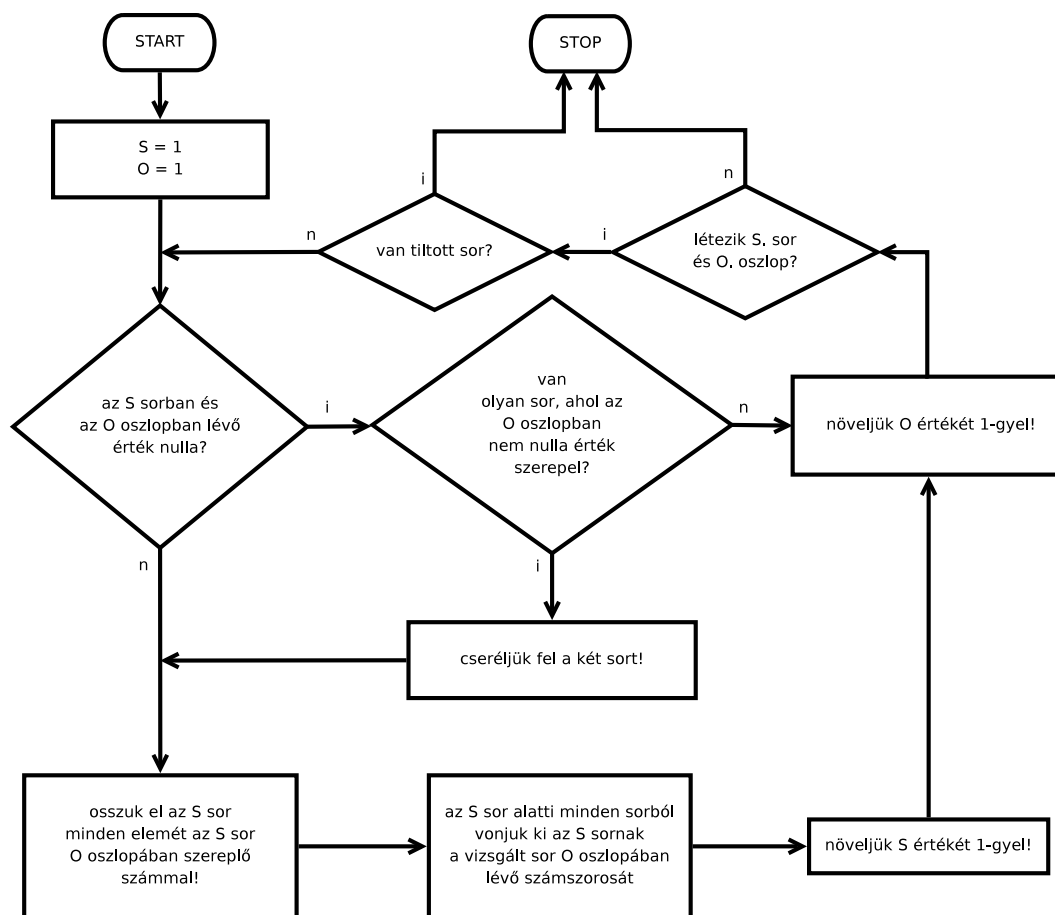
Az eredményben minden sorban a legbaloldalabbi oszlopban szereplő 1 számot **vezéregyesnek** [leading coefficient / pivot element] nevezzük. Minden sorban egyetlen vezéregyes található, és egy vezéregyes az előző sorban lévőhöz képest jobbra lévő oszlopban van (nem biztos, hogy a közvetlenül utána következő oszlopban!). Minden vezéregyes oszlopában a vezéregyes alatt csak nullák találhatók.

Ha az eredményben (vagy a számolás során) olyan sort találunk, ami csak nullákból áll, akkor azt nem kell figyelembe vennünk, hiszen az eredményt nem befolyásolja. Az algoritmus az ilyen sorokat mindig az utolsó sorokba mozgatja.

Ha olyan sort találunk, aminek az utolsó elemén kívül minden eleme nulla, de az utolsó elem nem nulla, akkor **tiltott sort** találtunk, ami az előzőekben tárgyaltaknak megfelelően azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása (így nem is szükséges tovább számolnunk).

Az algoritmus eredményét **lépcsős alaknak** (LA) [row echelon form (REF)] nevezzük.

Feladatok: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 16



1. ábra. A Gauss elimináció algoritmusa

4. Gauss-Jordan elimináció

A Gauss eliminációt annyival bővíti ki, hogy az elemi ekvivalens sorműveletekkel minden vezéregyes oszlopában a vezéregyes felett is nullázza a számokat. Más szavakkal azt is mondhatnánk, hogy a vezéregyes az egyetlen nem nulla elem a vezéregyes oszlopában. Fontos kiemelni, hogy olyan oszlopokban, amelyekben nincs vezéregyes, továbbra is szerepelhetnek nem nulla elemek! Az így kapott eredményt **redukált lépcsős alaknak** (RLA) [reduced row echelon form (RREF)] nevezzük, és segítségével a megoldások könnyen leolvashatók.

Feladatok: [8](#), [11](#), [12](#), [13](#), [15](#), [17](#), [18](#), [19](#), [20](#)

5. Egzisztencia és unicitás

5.1. tétel. Minden, lineáris egyenletrendszerből képezhető, tárgyalási felírási módnak pontosan egy RLA formája van, amit elemi ekvivalens sor műveletekkel megkaphatunk.

5.2. definíció. Egy lineáris egyenletrendszert **konzisztensnek** nevezzük, ha (R)LA formájában nincs tiltott sor.

5.3. tétel. Ha egy lineáris egyenletrendszer konzisztens, akkor van megoldása: ha az RLA formában az utolsó oszlop kivételével kizárólag vezéregyesek találhatók, akkor egyetlen megoldása van, az összes többi esetben végtelen sok.

5.4. tétel. Ha egy lineáris egyenletrendszernek végtelen megoldása van, akkor az RLA formában a vezéreggyessel nem rendelkező oszlopoknak megfelelő változók szabadon megválaszthatók.

6. Feladatok

1. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$3x = 9$$

$$4y = 2$$

2. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$3x = 0$$

$$4y = 0$$

3. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$6y = 12$$

$$3x + 2y = 7$$

4. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$6y = 0$$

$$3x + 2y = 0$$

5. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$4.5x + 3y = 12$$

$$3x + 2y = 7$$

6. Az egyenleteknek megfelelő egyenesek állásából következtessünk a megoldások számára, majd oldjuk meg Gauss eliminációval!

$$4.5x + 3y = 10.5$$

$$3x + 2y = 7$$

7. Oldjuk meg Gauss eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$4.5x_1 + 3x_2 = 10.5$$

$$3x_1 + 2x_2 = 7$$

$$15x_1 + 10x_2 = 35$$

8. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3\end{aligned}$$

9. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3\end{aligned}$$

10. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$$

11. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}3y &= 10 \\ 3x + 2y &= 7 \\ 15x + 10y &= 35\end{aligned}$$

12. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 11 \\ x - y - 2z &= -7 \\ 3x + 2y - z &= 4\end{aligned}$$

13. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

14. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1\end{aligned}$$

15. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 9 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= -17\end{aligned}$$

16. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$x_1 - 5x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

17. Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval a következő egyenletrendszert:

$$3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5$$

$$3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 9$$

$$3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 = 15$$

18. A t paraméter mely értékeire nincs az egyenletrendszernek megoldása illetve 1 vagy végtelen megoldása? Ha van megoldás, adjuk meg azokat!

$$3x_1 + tx_2 = -42$$

$$-2x_1 + 8x_2 = 28$$

19. A t paraméter mely értékeire nincs az egyenletrendszernek megoldása illetve 1 vagy végtelen megoldása? Ha van megoldás, adjuk meg azokat!

$$3x_1 + tx_2 = 42$$

$$-2x_1 + 8x_2 = 28$$

20. A t paraméter mely értékeire nincs az egyenletrendszernek megoldása illetve 1 vagy végtelen megoldása? Ha van megoldás, adjuk meg azokat!

$$x_1 + x_2 - x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$$-x_1 - x_2 + 4x_3 = -12$$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = t$$

7. Megoldások

1. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek nem párhuzamosak (nincs olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva az két egyenlet megfelelő együtthatói egyenlőek lesznek), egy pontban metszik egymást, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

2. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek nem párhuzamosak (nincs olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva az két egyenlet megfelelő együtthatói egyenlőek lesznek), egy pontban metszik egymást, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek nem párhuzamosak (nincs olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva az két egyenlet megfelelő együtthatói egyenlőek lesznek), egy pontban metszik egymást, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek nem párhuzamosak (nincs olyan szám, amivel az egyik egyenletet megszorozva az két egyenlet megfelelő együtthatói egyenlőek lesznek), egy pontban metszik egymást, azaz az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Az egyetlen megoldás tehát az $x = 0, y = 0$ pont.

5. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek párhuzamosak (a második egyenletet 1.5-del megszorozva az két egyenlet megfelelő együtthatói egyenlőek lesznek), nem metszik egymást, azaz az egyenletrendszernek nincs megoldása. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 8/3 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mivel a második sor tiltott sor, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

6. Mivel a két egyenlet által megadott egyenesek egybe esnek (a második egyenletet 1.5-del megszorozva az első egyenletet kapjuk), az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Gauss-eliminációval megoldva:

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 3 & 10.5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel az utolsó sor csak nullákból áll, azt elhagyhatjuk, és a megmaradt sor megadja az x és y közötti kapcsolatot: $x = 7/3 - 2/3y$ de y helyébe bármilyen számot behelyettesíthetünk, azaz végtelen megoldás van.

7.

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 3 & 10.5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 15 & 10 & 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 15 & 10 & 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel az utolsó két sor csak nullákból áll, azt elhagyhatjuk, és a megmaradt sor megadja az x és y közötti kapcsolatot: $x = 7/3 - 2/3y$ de y helyébe bármilyen számot behelyettesíthetünk, azaz végtelen megoldás van.

8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Egyetlen megoldás létezik: $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$.

9.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mivel tiltott sort találtunk, nincs megoldás.

10.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Végtelen sok megoldás van: a vezéregyes nélküli oszlopnak megfelelő változó (x_2) szabadon megválasztható, és vele a másik változó kifejezhető: $x_1 = 2x_2 - 1$.

11.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 7 \\ 15 & 10 & 35 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 10 \\ 15 & 10 & 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & 10 \\ 15 & 10 & 35 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A csak nullákból álló sort elhagytuk, a megmaradt sorok megadják a megoldástt: $x = 1/9$ és $y = 10/3$, azaz egy megoldás van.

12.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 11/2 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & -25/2 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & -25/2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5/2 & -5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 11/2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A csak nullákból álló sort elhagyhatjuk, a vezéregyest nem tartalmazó oszlopnak megfelelő változó (x_3) értéke szabadon megválasztható, a többi változó segítségével kifejezhető: $x_2 = -x_3 + 5$ illetve $x_1 = x_3 - 2$

13.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Egyetlen megoldás létezik: $x_1 = 29$, $x_2 = 16$, $x_3 = 3$.

14.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tilos sort találtunk, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

15.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -17 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 3 & -1 & 19 \\ 0 & -4 & 2 & -26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1/3 & 19/3 \\ 0 & -4 & 2 & -26 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1/3 & 19/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Egyetlen megoldása létezik: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = -1$.

16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A felírásból közvetlenül látszik, hogy a vezéregyes nélküli oszlopoknak megfelelő ismeretlen (x_3) szabadon megválasztható, és a többi ismeretlen segítségével kifejezhető: $x_2 = -x_3 + 4$ és $x_1 = 5x_3 + 1$

17.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/3 & 8/3 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 4/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7/3 & 8/3 & -5/3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A vezéregyesek nélküli oszlopoknak megfelelő változók (x_3, x_4) szabadon megválaszthatók, és a többi ismeretlen segítségével kifejezhető: $x_5 = 1$, $x_2 = 2x_3 - 2x_4 - 3$, $x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 4$.

18.

$$\begin{bmatrix} 3 & t & -42 \\ -2 & 8 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & -14 \\ -2 & 8 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & -14 \\ 0 & \frac{2}{3}t + 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & -14 \\ 0 & \frac{2t+24}{3} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (*)$$

Ebből látszik, hogy akkor van végtelen megoldás, ha $t = -12$. Ekkor

$$(*) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Azaz $x_1 = 4x_2 - 14$, és x_2 értéke szabadon megválasztható.

Ha $t \neq -12$, akkor elvégezzük az osztást:

$$(*) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Azaz $x_1 = -14$, $x_2 = 0$.

Összefoglalva:

$t = -12$ esetén $x_1 = 4x_2 - 14$, és x_2 értéke szabadon megválasztható,

t bármely más értékére: $x_1 = -14$, $x_2 = 0$,

t -nem választható meg úgy, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása.

19.

$$\begin{bmatrix} 3 & t & 42 \\ -2 & 8 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & 14 \\ -2 & 8 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & 14 \\ 0 & \frac{2}{3}t + 8 & 56 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & 14 \\ 0 & \frac{2t+24}{3} & 56 \end{bmatrix} \rightarrow (*)$$

Ebből látszik, hogy ha $t = -12$, akkor nincs megoldás, mivel tiltott sort kapunk:

$$(*) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}$$

Ha $t \neq -12$, akkor elvégezhető az osztás:

$$(*) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{3} & 14 \\ 0 & 1 & \frac{84}{t+12} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{84t}{3(t+12)} + 14 \\ 0 & 1 & \frac{84}{t+12} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14\frac{t-12}{t+12} \\ 0 & 1 & \frac{84}{t+12} \end{bmatrix}$$

Összefoglalva:

Ha $t = 12$, akkor nincs megoldás,

ha $t \neq 12$, akkor $x_1 = -14\frac{t-12}{t+12}$, $x_2 = \frac{84}{t+12}$,

t nem választható meg úgy, hogy az egyenletrendszernek végtelen megoldása legyen.

20.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & c+18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & c+9 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & c+9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix} \rightarrow (*) \end{aligned}$$

Azaz az egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha $t = -2$. Ebben az esetben:

$$(*) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Azaz a megoldás: $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = -1$

Összefoglalva:

Ha $t \neq -2$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása,

ha $t = -2$, akkor a megoldás: $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = -1$,

t értéke nem választható meg úgy, hogy végtelen megoldás legyen.