Vektorok függetlensége, Bázis, Generátor rendszer

1.1 Milyen a paraméter esetén lesznek az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, és $\underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$ vektorok lin. összefüggőek?

Megoldás: $\underline{a}\underline{b}\underline{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 10 & 7 & a \end{vmatrix} = 2(-2a-21) - 1(-6a-30) = 2a - 12$

$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok pontosan akkor összefüggőek, ha a vegyes szorzatuk 0, vagyis, ha a=6.

1.2 Milyen a paraméter esetén alkotnak generátorrendszert az alábbi vektorok:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} a^2-2 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: 3 darab R^3-beli vektor generátorrendszer pontosan akkor, ha független (tehát, pontosan akkor, ha bázist alkotnak), vagyis ha $\underline{a}\underline{b}\underline{c} \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{a} \\ \mathrm{a}^2-2 & 1 & \mathrm{a}-1 \end{vmatrix} = \mathrm{a}^2 - \mathrm{a} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{a} \neq -1, \mathrm{a} \neq 2$$

1.2 Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok: $\underline{a} = (-2 \quad -4 \quad -1)$, $\underline{b} = (3 \quad 5 \quad 1)$, és $\underline{c} = (-3 \quad -2 \quad 4)$

Megoldás: $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2(20+2) - (-4)(12+3)$+(-1)(-6+15)=7 => függetlenek

1.3 $\underline{a} = (-1 \quad 3 \quad 2)$, $\underline{b} = (6 \quad 2 \quad 4)$, és $\underline{c} = (-5 \quad 5 \quad 2)$

1.4 $\underline{a} = (2 \quad -1 \quad 1)$, $\underline{b} = (2 \quad 4 \quad 6)$, és $\underline{c} = (3 \quad 3 \quad 3)$

1.5 $\underline{a} = (1 \quad 1 \quad 2)$, $\underline{b} = (1 \quad 2 \quad 5)$, és $\underline{d} = (5 \quad 3 \quad 4)$

2.1 Hány független vektor választható ki maximálisan az alábbi vektorok közül:

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}21\\19\\-27\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$$

- Oldja meg az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{e}$ egyenletrendszert!
- Oldja meg az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{d}$ egyenletrendszert!
- Generátorrendszerét alkotják-e a megadott vektorok R^3-nak
- Kiválasztható-e a vektorok közül R^3 egy bázisa?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix}3&-3&0&21&-12\\3&-2&2&19&-10\\-3&6&6&-27&23\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&7&-4\\0&1&2&-2&2\\0&3&6&-6&11\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&7&-4\\0&1&2&-2&2\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&5&-2\\0&1&2&-2&2\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&5&0\\0&1&2&-2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$ Három független vektor: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$

- Az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{e}$ egyenletrendszernek nem létezik megoldása!
- Az $x\cdot\underline{a}+y\cdot\underline{b}+z\cdot\underline{c}=\underline{d}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van:
  $x=5-2z$
  $y=-2-2z$ Például: $5\underline{a}-2\underline{b}=\underline{d}$
  $z\in R$
- Generátorrendszerét alkotják a vektorok R^3-nak!
- R^3-nak egy bázisa: $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\6\end{pmatrix},\underline{e}=\begin{pmatrix}-12\\-10\\23\end{pmatrix}$

2.2 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\21\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}7\\-6\\-35\end{pmatrix}$

a, Generátorrendszert alkotnak-e a fenti vektorok?
b, Bázist alkotnak-e a fenti vektorok?
c, Generátorrendszert alkotnak-e az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok?
d, Bázist alkotnak-e az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok?
e, Generátorrendszert alkotnak-e a $\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorok?
f, Bázist alkotnak-e a $\underline{b},\underline{c},\underline{d}$ vektorok?

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & -6 \\ -5 & 21 & 5 & -35 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 15 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2/19 & 0 & 1 & 0 \\ -5/19 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a, Igen   b, Nem   c, Nem   d, Nem   e, Igen   f, Igen

2.3 Állítsd elő a nullvektort az alábbi vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 47 \\ -23 \end{pmatrix}$$

- Lineárisan függetlenek-e a vektorok?
- Generátorrendszert alkotnak-e a vektorok R^4 -ben?
- Bázist alkotnak-e?

(4×4-es determináns számolással és/vagy Gauss algoritmussal is megoldható)