

Lineáris leképezések

1.1 Mely leképezések homogén lineárisak? Legyen $x, y \in \mathbb{R}$

a, $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

g, $G = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

b, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

h, $H = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$

c, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y \end{pmatrix}$

i, $I = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d, $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

j, $J = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e, $E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$

k, $K = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f, $F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \end{pmatrix}$

l, $L = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y \\ 5x \\ 2y-x \end{pmatrix}$

Megoldás:

a. Igen, mert

$$A\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

b. Igen

c. Igen

d. Igen

e. Nem, mert $E\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \lambda y \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

f. Nem

g. Igen

h. Nem

i. Nem

j. Nem

k. Igen

l. Igen

1.3 Homogén lineárisak-e a következő leképezések?

a) Minden 3x3-as valós mátrixhoz hozzárendeljük a determinánsát.

b) Minden 3x3-as valós mátrixhoz hozzárendeljük az első sorának első elemét.

c) minden térbeli vektort tükröznünk egy origón átmenő síkra.

g) Minden térbeli vektorhoz hozzárendeljük egy **adott** tengely körüli α szöggel történő elforgatottját.

h) Minden térbeli vektorhoz hozzárendeljük egy origón áthaladó síkra vett vetületét.

Megoldások

Minden esetben a két tulajdonságot kell ellenőrizni:

i) $L(u + v) = L(u) + L(v)$

ii) $L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u)$,

ahol u és v tetszőleges vektorok a vektortérből, α pedig egy valós szám.

a) Igaz-e az, hogy $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$? Nem. Hiszen pl. a nullmátrixot előállíthatjuk két nem nulla mátrix összegeként, amelyeknek determinánsa külön-külön nem nulla, de a nullmátrixszé nyilván az. Vagyis ez a leképezés nem lineáris. A másik tulajdonságot már ellenőrizni sem kell (de az sem igaz [hanem mi igaz helyette?]).

b) Igen,

c) Igen

g) Igen,

h) Igen,

1.3(Nehezebb feladat) Melyek homogén lineárisak és melyek nem a következő leképezések közül?

Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és tetszőleges $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén a leképezés:

a. A: $\underline{b} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b}$ Megoldás: Igen, mert $A(\lambda \underline{b}) = \underline{a} \cdot (\lambda \underline{b}) = \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \lambda A(\underline{b})$
 $A(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} = A(\underline{b}) + A(\underline{c})$

b. B: $\underline{b} \rightarrow \underline{a} \times \underline{b}$ M.o.: Igen c. C: $\underline{b} \rightarrow \underline{a} + \underline{b}$ M.o.: Nem

d. D: $\underline{b} \rightarrow |\underline{a}| \cdot \underline{b}$ M.o.: Igen e. E: $\underline{b} \rightarrow |\underline{b}| \cdot \underline{b}$ M.o.: Nem

f. F: $\underline{b} \rightarrow \underline{b} \cdot \underline{b}$ M.o.: Nem g. G: $\underline{b} \rightarrow \underline{b} \times \underline{b}$ M.o.: Nem

1.4(Nehezebb feladat) Legyen V a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomok vektortere. Ellenőrizze, hogy az alábbiak homogén lineáris leképezések!

a) $f(x) \rightarrow f'(x)$, (ahol az $f(x)$ az általános polinom a V térben)

b) $f(x) \rightarrow x \cdot f'(x)$, (ahol az $f(x)$ az általános polinom a V térben)

c) $f(x) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$, (ahol az $f(x)$ az általános polinom a V térben)

Leképezések mátrixa

Egy $A: V \rightarrow W$ homogén lineáris leképezés mátrixának j -edik oszlopa a V vektortér j -edik bázisvektorához rendelt képvektor koordinátáit tartalmazza a W vektortér megadott bázisában:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A(\underline{s}_1)_{[T]} & A(\underline{s}_2)_{[T]} & A(\underline{s}_3)_{[T]} & \dots & A(\underline{s}_n)_{[T]} \end{bmatrix} \text{ ahol } \begin{matrix} S = \{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n\} \text{ a } V \text{ bázisa} \\ T = \{\underline{t}_1, \underline{t}_2, \dots, \underline{t}_m\} \text{ a } W \text{ bázisa} \end{matrix}$$

Ha V vektortér n dimenziós, a W vektortér pedig m dimenziós. Akkor a leképezés mátrixa $m \times n$ -es!

2. Adja meg az 1.1 feladatban meghatározott homogén lineáris leképezések mátrixát a kanonikus bázispárban!

Megoldás:

$$\mathbf{a}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{l}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát (a kanonikus bázisban)!

- Síkbeli tükrözés az origóra.
- Térbeli tükrözés az origóra.
- Térbeli tükrözés az xy síkra.
- Síkbeli vektorok vetítése az x (illetve y) tengelyre.
- Térbeli vektorok vetítése az x tengelyre; az xy síkra; az xz síkra.
- Térbeli vektorok forgatása a z tengely körül α szöggel.
- Térbeli vektorok forgatása az y tengely körül α szöggel.

Megoldások

$$\mathbf{a)} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d)} x \text{ tengelyre: } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y \text{ tengelyre: } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e)} x \text{ tengelyre: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad xy \text{ síkra: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad xz \text{ síkra: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f)} \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g)} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$$