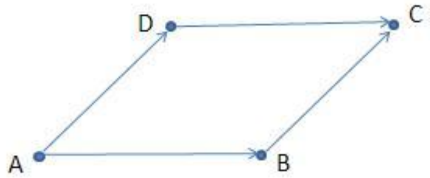
Vektoralgebra

1. Lineáris kombináció, koordináta, bázis, Gauss

1. Adott az ábrán látható ABCD paralelogramma. Határozza meg az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BD}$ vektorok koordinátáit az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok bázisára vonatkoztatva!

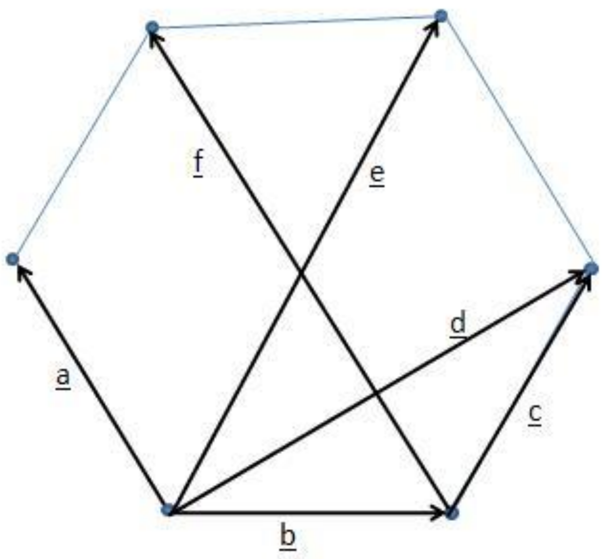


Megoldás

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{[\overline{AB},\overline{AD}]}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (-1)\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{[\overline{AB},\overline{AD}]}$$

2. Adott az alábbi **<u>szabályos</u>** (szeretne lenni) hatszög, adja meg az ábrázolt vektorok koordinátáit az **<u>a</u>**, **<u>b</u>** vektorok bázisában!



$$\underline{a} = 1\cdot\underline{a} + 0\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

$$\underline{b} = 0\cdot\underline{a} + 1\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

$$\underline{c} = 1\cdot\underline{a} + 1\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

$$\underline{d} = \underline{b} + \underline{c} = 1\cdot\underline{a} + 2\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

$$\underline{e} = \underline{d} + \underline{a} = 2\cdot\underline{a} + 2\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

$$\underline{a} = 2\cdot\underline{a} + 1\cdot\underline{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b}]}$$

3. a, Bizonyítsa be, hogy a $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix}11\\21\\28\end{pmatrix}$ vektor előállítható az $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ vektorok lineáris kombinációjaként! Adja meg ezt a lineáris kombinációt!

b, Adja meg a **<u>v</u>** vektor koordinátáit az **<u>a</u>**, **<u>b</u>**, **<u>c</u>** vektorok bázisában!

Megoldás

a, A következő vektoregyenlet megoldásait keressük: $\underline{v} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b} + \gamma \cdot \underline{c}$

Ez egy lineáris egyenletrendszer α, β, γ ismeretlenekkel, Gauss-J. algoritmussal megoldható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 21 \\ 6 & 7 & 3 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ -10 & -3 & 0 & -23 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & 1 & 21 \\ -19 & 0 & 0 & -38 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

→ $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3$ → Tehát a lineáris kombináció: $\underline{v} = 2 \cdot \underline{a} + 1 \cdot \underline{b} + 3 \cdot \underline{c}$

b,

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]}$$

4. Milyen *t* érték(ek) mellett **NEM** állítható elő a $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 28 \end{pmatrix}$ vektor az $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 7 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ lineáris kombinációjaként?

Megoldás:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 21 \\ 6 & 7 & 3 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ -10 & t-8 & 0 & -23 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3t-34 & 0 & -19 \\ -3 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

→ Csak akkor van megoldás, ha $t \neq \frac{34}{3}$, tehát ha $t = \frac{34}{3}$ akkor tiltósort kapunk és ekkor a a $\underline{\mathbf{v}}$ vektor nem állítható elő az $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

5. Előállítható-e a $\underline{e}$ vektor az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként? Ha igen, hogyan?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -17 \end{pmatrix}, \underline{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & -6 & 10 & -12 \\ 3 & 9 & 9 & -17 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1 - 10\gamma \\ \beta = -10 + 5\gamma \\ \gamma \in R \\ \delta = -2 \end{array}$$

Igen előállítható méghozzá végtelen sok megoldás van!

Például egy megoldás: $\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = -10 \\ \gamma = 0 \\ \delta = -2 \end{array}$ → $\underline{e} = (-1) \cdot \underline{a} + (-10) \cdot \underline{b} + 0 \cdot \underline{c} + (-2) \cdot \underline{d}$

6. Adott négy vektor: $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}4\\9\\-1\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}3\\11\\-4\end{pmatrix}$

a, Előállítható-e a $\underline{d}$ vektor az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként? Ha igen, hogyan?
b, És az $\underline{a}$ vektor az $\underline{d},\underline{b},\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

Megoldás:

a, Igen előállítható, és pontosan egy megoldás van rá: $\underline{d}=-14\cdot\underline{a}+\frac{9}{2}\cdot\underline{b}+\frac{1}{2}\cdot\underline{c}$

b, Igen, $\underline{a}=\frac{-1}{14}\cdot\underline{d}+\frac{9}{28}\cdot\underline{b}+\frac{1}{28}\cdot\underline{c}$

7. Előállítható-e a $\underline{d}$ vektor az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként? Ha igen hogyan?

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\underline{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix},\underline{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\\5\end{pmatrix},\underline{d}=\begin{pmatrix}-4\\-1\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

Megoldás
Igen előállítható: $\underline{d}=-6\cdot\underline{a}+1\cdot\underline{b}+2\cdot\underline{c}$

8. Adott az alábbi három sík. Adja meg a három sík közös pontjainak halmazát! Milyen geometriai objektumot határoznak meg?

$$S_1 = 2x - 2y - z = 3$$

$$S_2 = x - 2y = -7$$

$$S_3 = 2x - 2y - z = 3$$

Megoldás

A három síkegyenlet által meghatározott lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

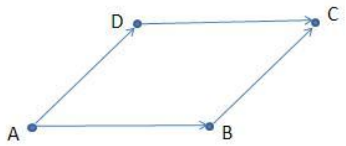
$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&-1&3\\1&-2&0&-7\\2&-2&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&-1&17\\1&-2&0&-7\\0&2&-1&17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&-1&21\\1&-2&0&-7\\0&0&0&0\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}x=-7+2y\\y\in R\\z=-21+2y\end{array}$$

Végtelen sok metszéspont van, a síkok metszete egy egyenes.

2. Vektoralgebra

1. Adott egy paralelogramma három csúcsa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$



a, Határozza meg a negyedik pont koordinátáit
b, Határozza meg a paralelogramma kerületét!
c, Adja meg a paralelogramma szögeit!
d, Határozza meg az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasság vektorát!
e, Határozza meg a paralelogramma területét

Megoldás

a, Két oldalvektora: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

C pont koordinátái: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b, Legyen a két oldalvektor: $\underline{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

A vektorok hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5 \qquad |\underline{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

Tehát a kerület: $K = 10 + 2\sqrt{6}$

c, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skalárszorzata: $\underline{a} \cdot \underline{b} = (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge: $\cos\alpha = \dfrac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \dfrac{1}{5\sqrt{6}} \rightarrow \alpha = 85{,}3^\circ$

d, $\underline{a}$ -val párhuzamos egységvektor: $\underline{e}_a = \dfrac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

A $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorral párhuzamos komponense:

$$\underline{a}_{II} = (\underline{b} \cdot \underline{e}_a) \cdot \underline{e}_a = (1 \cdot \frac{-3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0) \cdot \underline{e} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/25 \\ 4/25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A párhuzamos komponens képletének egy másik lehetséges felírása:

$$\underline{a}_{II} = (\underline{b} \cdot \underline{e}_a) \cdot \underline{e}_a = \left(\underline{b} \cdot \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \right) \cdot \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{(\underline{b} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{a}}{|\underline{a}|^2}$$

A keresett magasságvektor megegyezik a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorra merőleges komponensével:

$$\underline{m} = \underline{b}_{\perp} = \underline{b} - \underline{b}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/25 \\ 4/25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/25 \\ 21/25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e, Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i(4\cdot 2 - 0\cdot 1) - j((-3)\cdot 2 - 0\cdot 1) + k((-3)\cdot 1 - 4\cdot 1) = 8i + 6j - 7k = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A vektoriális szorzat hossza megadja a paralelogramma területét:

$$T_{paralelogramma} = |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{8^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{149}$$

(Emlékeztető: $T_{háromszög} = \dfrac{T_{paralelogramma}}{2} = \dfrac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2}$)

2. Adott két vektor, $\underline{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, illetve a tér egy pontja, $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a, Írja fel a pont és a két vektor által meghatározott sík egyenletét!

b, Legyen $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ a tér egy másik pontja. Rajta van-e az előző feladatban meghatározott síkon?

c, Megadunk egy harmadik vektort, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$-t. Mennyi az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata? Az indokláshoz használja a vektoralgebrában tanult ismereteket!

Megoldás

a, A két vektor vektoriális szorzata merőleges mindkét vektorra, ezért merőleges a síkra is, így ez lesz a sík normálvektora: $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2i + 6j + 9k = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

A sík egyenletének képlete Ax+By+Cz = $Ax_0+By_0+Cz_0$ ahol $\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ a normál vektor és $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ a sík egy tetszőleges pontja. → a SÍK EGYENLETE: $2x + 6y + 9z = 8$

b, $2\cdot 0 + 6\cdot(-5) + 9\cdot 3 = -3 \neq 8$ P nincs rajta a síkon, mert nem teljesíti az egyenletet.

c, A paralelepipedon térfogata a három vektor vegyes szorzatával egyezik meg:

$$V_{paralelepipedon} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 121$$

(Emlékeztető: $V_{tetraéder} = \dfrac{V_{paralelepipedon}}{6} = \dfrac{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}{6}$)

3. Számítsa ki a 2x+y+3z=2 és a 4x-y+z=-3 egyenletű síkok által bezárt (kisebbik) szöget!

Megoldás:
A két sík által bezárt szög megegyezik a normálvektoraik által bezárt szöggel. A normálvektorok koordinátái pedig az egyenletekből leolvashatóak.
A két normálvektor: n1=(2,1,3), n2=(4,-1,1)
A normálvektorok hossza: |n1|=gyök(14), |n2|=gyök(18)
A bezárt szög: cos alfa=(8-1+3)/gyök(14)gyök(18)=0,63 alfa=50,95

4. Számítsa ki a $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pont és a 2x-6y+3z=5 egyenletű sík távolságát!

Megoldás

Megkeressük a sík egy tetszőleges pontját, ami kielégíti az egyenletet, legyen ez a pont: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A P pont síktól vett távolságát megkapjuk, ha az A pontból a P-be mutató vektor merőleges vetületét vesszük a sík normálvektorára.

$\overline{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ Normálvektorral párhuzamos egységvektor: $\underline{e}_n = \dfrac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

($|\underline{n}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$)

$\overline{AP}$ merőleges vetülete a normálvektorra: $\overline{AP} \cdot \underline{e}_n = (2 + 6 - 12)/7 = -4/7$
Azért lett negatív, mert a síknak nem azonos oldalán volt a pont és a normálvektor.
A P pont távolsága a síktól: 4/7

5. Adottak a térben az alábbi pontok:

A[1;2;3], B[1;0;-1], C[2;4;-2], D[-2;4;3]

a) Adja meg az A,B és C pontok által meghatározott sík egyenletét és lássa be, hogy a 4 pont nincs egy síkban!
b) Számítsa ki a pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!
c) Adja meg a tetraéder D ponthoz tartozó magasságát!
d) Adja meg a tetraéder D ponthoz tartozó magasságvektorát!

Megoldás

a) Az A,B és C pontok meghatároznak két vektort: $\underline{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

A sík normálvektora: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 18i + 4j + 2k = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

A sík egyenlete: $18x + 4y + 2z = 32$

D pont koordinátáit behelyettesítve: $18(-2) + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14 \neq 32$ → Nincs a síkon a D pont.

b) A tetraédert meghatározó harmadik vektor: $\underline{c} = \overline{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Térfogat: $V_{paralelepipedon} = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (18 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = -46$

$$V_{tetraéder} = \frac{V_{paralelepipedon}}{6} = \frac{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}{6} = \frac{-46}{6}$$

c) A tetraéder magasságát kétféle módon is számolhatjuk:

(1) $m = \dfrac{V_{tetraéder}}{T_{alapháromszög}} = \dfrac{V_{paralelepipedon}}{T_{alapparalelogramma}} = \dfrac{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \dfrac{-46}{\sqrt{18^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{-46}{\sqrt{344}}$

(2) A tetraéder magassága = a D csúcs távolsága az ABC síktól (pont és sík távolsága)

$$m = \overline{AD} \cdot \underline{e}_n = \underline{c} \cdot \underline{e}_n = \underline{c} \cdot \frac{\underline{n}}{|\underline{n}|} = \underline{c} \cdot \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18/\sqrt{344} \\ 4/\sqrt{344} \\ 2/\sqrt{344} \end{pmatrix} =$$

$$= \left((-3) \cdot \frac{18}{\sqrt{344}} + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{344}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{344}} \right) = \frac{-46}{\sqrt{344}}$$

d) A tetraéder magasságvektora merőleges az alaplap síkjára, ezért párhuzamos a sík normálvektorával, a hossza pedig a c) feladatban kiszámolt m, ezért a magasságvektor = m * normálvektor irányú egységvektor:

$$\underline{m} = m \cdot \underline{e}_n = \frac{-46}{\sqrt{344}} \cdot \begin{pmatrix} 18/\sqrt{344} \\ 4/\sqrt{344} \\ 2/\sqrt{344} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -828/344 \\ -184/344 \\ -92/344 \end{pmatrix}$$

6. Az ókori Egyiptomban a egyszer templomot építettek Hórusz tiszteletére. A templom érdekessége hogy a kapuja nem a szokásos téglalap, hanem háromszög alakú volt, még csak nem is egyenlőszárú. A háromszögletű ajtó felső csúcsán egy kőbe vésett szem jelezte az arra járóknak, hogy Hórusz templomához tévedtek. A kapuban pontosan a szem alatt egy apró kígyó tekergőzött és őrizte az egyetlen bejáratot. A templom terveinek készítésekor óegyiptomi koordinátarendszert használtak, melyben a bejárat három csúcsának:

$$A=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}9\\10\\-1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}$$

Itt A és B a háromszög alapjának két csúcsa, C a felső csúcs. Vajon, óegyiptomi koordinátarendszerben, mik annak a vektornak a koordinátái, ami a kígyótól a szemhez mutat?

Megoldás:

$$\overline{AC}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 1\end{pmatrix}$$
$$\overline{AB}=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\end{pmatrix}$$
$$\overline{AC}_{\parallel}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5} & \frac{8}{5} & 0\end{pmatrix}$$
$$\overline{AC}_{\perp}=\begin{pmatrix}\frac{24}{5} & \frac{-18}{5} & 1\end{pmatrix}$$

7. A matematikusok pikniket szerveznek, és elhatározzák, hogy erre az alkalomra sütnek egy szép nagy paralellepipedon alakú tortát. Sajnos azonban nem tudják, hogy pontosan mennyi massza szükséges a tésztához, ezt még ki kell számolni. Azt tudjuk, hogy az alaplap hosszabbik oldala 4 dm, szélessége 2 dm, és az oldalak 45 fokos szöget zárnak be. A harmadik oldal és a hosszabbik alapél által meghatározott sík merőleges az alaplap síkjára. A harmadik oldal hossza $\sqrt{2}$, és a végpontjából a hosszabbik oldalra állított merőleges az oldalt közös pontjuktól 1 dm távolságra metszi. Számítsuk ki a szükséges tészta térfogatát!

Megoldás:

A paralelepipedont meghatározó három vektor: a = (4,0,0) b = (2,0,-2) c = (1,1,0)
Atérfogat vegyes szorzat alapján: V = 8 dm^3

8. Adottak a térben az alábbi pontok:

A[2;5;3], B[2;-7;-2], C[1;4;3]

a) Számítsa ki az általuk meghatározott háromszög területét!
b) Számítsa ki a háromszög legnagyobb szögét!
c) Adja meg a C csúcsból induló magasságvektor koordinátáit!

megoldás:
a) T = 6,964
b) a legnagyobb szög a C csúcsnál van, 140,29fok
c) m_c = [-1, -168/169; 5/2028]

9. Legyenek adottak az alábbi pontok Tekintsük az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által kifeszített paralelogrammát, melynek negyedik csúcsát jelölje C!

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Számítsa ki a paralelogramma kerületét!
b) Határozza meg az ABD háromszög D csúcsához tartozó magasság vektorát!

Megoldás:
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $C = \underline{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$
$K = 2|\overrightarrow{AB}| + 2|\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{9+9+9} + 2\sqrt{9+16+121} = 34{,}39$
b) $\overrightarrow{AM} = \frac{(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} = \frac{-9+12+33}{27}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

10. Legyenek adottak az alábbi pontok (az i, j, k bázisban). Tekintsük az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok által kifeszített paralelogrammát, melynek negyedik csúcsát jelölje C!

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Számítsa ki a paralelogramma kerületét!
b) Határozza meg az ABD háromszög D csúcsához tartozó magasság vektorát!

Megoldás:
a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $C = \underline{b} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
$K = 2|\overrightarrow{AB}| + 2|\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{9+9+36} + 2\sqrt{36+1+49} = 33{,}24$
b) $\overrightarrow{AM} = \frac{(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} = \frac{18+3+42}{54}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{7}{6}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -11/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. Egy olyan tetraéder alakú prizmát szeretnénk gyártani üvegből, melynek csúcsai az alábbi pontokba kell illeszkednek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Ahhoz, hogy a prizmát készítő gép pontosan tudjon vágni, meg kell adnunk az oldallapok síkjainak egyenleteit. Az ABC oldallap kivételével minden oldal síkjának egyenlete ismert. Határozza meg a hiányzó oldallap síkjának egyenletét!
b) Szeretnénk tudni, hogy a prizma oldalait megvilágítva mekkora szögű fénytörés fog bekövetkezni. Ehhez ismerni kell az oldallapok által bezárt szögeket. Határozza meg az ABC és az ACD oldallapok síkjai által bezárt szöget!
c) Szeretnénk meghatározni a prizma várható súlyát még az elkészítés előtt. Mivel ismert az alkalmazott üveg sűrűsége, ehhez elég meghatároznunk a prizma térfogatot. Mekkora ez a térfogat?
d) Szeretnénk tudni, hogy milyen magas a prizma, ha az ABC oldallapjára állítjuk. Határozza meg ezt a magasságot!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -42 \\ 28 \\ -14 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 3x - 2y + z = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 2$

b) $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} = \underline{n}_{ACD}$

$cos\varphi = \frac{\underline{n}_{ABC} \cdot \underline{n}_{ACD}}{|\underline{n}_{ABC}| \cdot |\underline{n}_{ACD}|} = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{164}} = 0{,}2922 \rightarrow \varphi = 73{,}01°$

c) $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$

d) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$m = \frac{(\overrightarrow{AD} \cdot \underline{n})}{|\underline{n}|} = \frac{|-3-4+1|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6}$

12. Egy olyan tetraéder alakú prizmát szeretnénk gyártani üvegből, melynek csúcsai az alábbi pontokba kell illeszkednek.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Ahhoz, hogy a prizmát készítő gép pontosan tudjon vágni, meg kell adnunk az oldallapok síkjainak egyenleteit. A BCD oldallap kivételével minden oldal síkjának egyenlete ismert. Határozza meg a hiányzó oldallap síkjának egyenletét!
b) Szeretnénk tudni, hogy a prizma oldalait megvilágítva mekkora szögű fénytörés fog bekövetkezni. Ehhez ismerni kell az oldallapok által bezárt szögeket. Határozza meg az ABC és a BCD oldallapok síkjai által bezárt szöget!
c) Szeretnénk meghatározni a prizma várható súlyát még az elkészítés előtt. Mivel ismert az alkalmazott üveg sűrűsége, ehhez elég meghatároznunk a prizma térfogatot. Mekkora ez a térfogat?
d) Szeretnénk tudni, hogy milyen magas a prizma, ha az ACD oldallapjára állítjuk. Határozza meg ezt a magasságot!

Megoldás:

a) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -38 \\ 19 \\ -38 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{n}_{BCD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2x - y + 2z = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 3$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 26 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{n}_{ABC}$

$cos\varphi = \frac{\underline{n}_{ABC} \cdot \underline{n}_{BCD}}{|\underline{n}_{ABC}| \cdot |\underline{n}_{BCD}|} = \frac{62}{\sqrt{9}\sqrt{741}} = 0{,}7592 \rightarrow \varphi = 40{,}61°$

c) $V = \frac{1}{6} \cdot |(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{95}{6}$

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$

$m = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \underline{n}|}{|\underline{n}|} = \frac{|-4+7-8|}{3} = \frac{5}{3}$

13. Határozza meg az ABCD paralelogramma C csúcsát és szögeit, ha az A az origó, és további két csúcs koordinátái:

B(1, 0, 0), D(1, 2, -1)

b) Adja meg az E(2, -1, 3), a D és C pontok által meghatározott sík egyenletét

Megoldás
Jelöljük az adott csúcsokba mutató vektorokat kis a, b, c, d, e betűkkel.
C koordinátái: c=b+d=(2, 2, -1)
Szögek: ?
Két síkbeli vektor koordinátái: d-c=(-1, 0, 0) e-c=(0, -3, 4)
Két síkbeli vektor vektoriális szorzat adja a normálvektort:

$$(d-c)x(e-c) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} =0i+ 4j+3k$$

n=(0, 4, 3)
A sík egyenlete 4y+3z = 5

14. Olaszország egyik kisvárosának lakosa, Giovanni elhatározta, hogy tetraéder alakú medencét építtet, mert szeretett volna kitűnni az egyhangú szomszédok közül. A tervező Giovanni kertjében kijelölte a medence 4 csúcsának koordinátáit egy általa választott koordinátarendszerben, melyről annyit tudunk, hogy 1 egység = 1 méter.

$O=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

a) Elkészülte után hány köbméter víz fér majd a medencébe?

b) Giovanni szeretné télen ponyvával lefedni a medencét. Hány négyzetméter ponyvára lesz szüksége, ha a tetraéder *OAB* lapja esik a víztükör síkjába ?

c) A tervező a medencét díszkövekkel szeretné szegélyezni. Hány méter hosszú lesz a díszkősor a medence körül?

15. Az *S* sík merőleges a $\underline{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ vektorra, és tartalmazza az $A=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ pontot.

a) Határozza meg az *S* sík egyenletét!

b) Milyen távol van a $B=\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ pont az *S* síktól?

c) Írja fel a *B* pontba mutató helyvektort az *S* síkra merőleges és párhuzamos vektorok összegeként!

16. Milyen szöget zár be egymással az S_1 és S_2 sík?

$$S_1 = 2x - 2y - z = 3$$

$$S_2 = x - 2y + 7 = 0$$

17. Adott négy pont: A(1, -2, 3), B(-4, 2, 1), C(3, 2,1), D(-4, -2, 5).

a, Írja fel az ABC pontok által meghatározott S sík egyenletét!

b, Számítsa ki az ABC háromszög területét a tanult vektoralgebrai módon!
c, Milyen messze van a D pont az 1.1-beli S síktól?
d, Adja meg az ABC háromszög B csúcsába **mutató magasságvektor <u>koordinátáit</u>**!

18. Mekkora a következő vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata?

[3, 2, 6], [2, -1, 1], [-1, 1, -2]

19. Adott egy tetraéder, melynek csúcsai az alábbiak:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Határozza meg az ABC oldallap síkjának egyenletét!
b) Határozza meg az ABC és ACD oldallapok síkjai által bezárt szöget, ha ismert, hogy az ACD oldallap síkjának egyenlete $3x + y + z = 3$!
c) Határozza meg a tetraéder térfogatát!
d) Határozza meg a tetraéder D csúcsához tartozó magasság nagyságát!