

Vizsga Lineáris algebra tárgyból

2014/15 akadémiai év, I. félév

TARTALOM:

1. Elméleti anyag (melyet a vizsgára meg kell tanulni)...	2. old.
2. A vizsga lebonyolítása, osztályozás.....	3. old.
2.1 Vizsga menete, jegy számítása.....	3. old.
2.2 Írásbelivel kapcsolatos általános tudnivalók.....	4. old.
2.3 Szóbelivel kapcsolatos tudnivalók.....	5. old.
2.4 A tanulásról.....	5. old.
3. Írásbeli és szóbeli részletes ismertetése.....	6. old.
3.1 Elégséges szinthez feladattípusok.....	7. old.
3.2 Tételek szintezett listája	9. old.

1. Elméleti anyag

A vizsgára megtanulandó elméleti rész Bércesné Novák Ágnes: Lineáris algebra – Az alapoktól az Euklideszi terekig című jegyzetben található.

2012/13 első félévében a következő fejezetek szerepeltek:

- az 1., 2., 3., 4., fejezetek teljes egészében
- 5. fejezetből az 5.1, 5.2 a Diszkrét matematika tárgyban volt, 5.3, 5.4.1, 5.4.2, 5.4.3, 5.4.4 tartozik a lineáris algebra vizsgához,
- 6. fejezetből volt: 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5. (A 6.6 fejezet a 2. félévben lesz majd)
- 7.1, 7.2, 7.3, 7.4.2, 7.4.3 (7.4.1: CRAMER szabály még nem szerepelt)
- 8. fejezetből volt: 8.1, 8.2, 8.3, 8.4. Csak előadáson volt: 8.5, 8.6 – definíciókat, tételeket tudni kell, bizonyítást nem.
- 9. fejezetből volt: 9.1, 9.2., 9.3.

Felhívom figyelmüket, hogy a tananyag egyik legfontosabb része a 101-103 oldalon található. Ezt a részt különösen alaposan kell tanulmányozni.

A fenti felsorolásban szereplő elméleti anyagban található definíciókat, tételeket pontosan ki kell tudni mondani, **és bizonyítani is kell**. Vannak nehezebb tételek, melyeket elégséges és közepes jegyért csak kimondani kell tudni, a bizonyítást csak jó és jeles jegyért kérdezzük, a listát ld. ezen dokumentum 3.1, 3.2 pontjainál.

Nagyon fontos, hogy a tananyagot MEGÉRTSÉK. Hiába tudja valaki felmondani a tételt és bizonyítását, ha egyszerű kérdésekre adott feleletéből kiderül, nem érti, miről van szó. Sajnos, ez bukáshoz is vezethet.

Aki évközben nem foglalkozott az elmélettel, csak alkalmazás szinten, de a középiskolában jó volt matematikából, annak kb. **5 teljes napi** tanulásra van szüksége, melyből 3-4 nap a megértés, elmélyedés, 1-2 nap a rögzítés. Akinek a középiskolában nem ment annyira könnyen a matematika, annak inkább **6-7 nap** szükséges.

Általában a matematika tanulásához részletes tanulási tanácsok [itt](#) olvashatók.

2. A vizsga lebonyolítása, osztályozás

2.1 Vizsga menete, jegy számítása

A hallgató csak akkor vizsgáztatható, ha a NEPTUNBAN a vizsgát felvette. Vizsgát csak akkor tehet a hallgató, (akkor is, ha esetleg a NEPTUN-ban sikerült felvennie a vizsgát), ha az évközi teljesítménye megfelel a tantárgyi követelményekben előírtaknak (aláírással rendelkezik), valamint, amennyiben Matematika alapjait felvette, abból SIKERES vizsgát tett.

A **vizsga kötelező írásbeli** (kivéve decemberi elővizsga) és választható szóbeli részből áll. A kötelező írásbeli részt annak pontszáma alapján százalékosan értékeljük. **Az írásbelin is van egy alapszint, amelyet ha nem teljesít a hallgató, elégtelen érdemjegyet kap.** Csak legalább **elégséges jegyet lehet a szóbelivel** módosítani.

Jeleshez szóbeli vizsgát is kell tenni.

Az év közben összegyűjtött (gyakorlati) pontszámból számolt százalék és a vizsga írásbeli rész százalékának matematikai átlaga alapján a hallgató megajánlott jegyet kap, melyet szóbeli vizsgán javíthat (vagy ronthat). Az összesített átlagos százalék alapján a megajánlott jegy:

60%-tól elégséges, 70%-tól közepes, 80%-tól jó.

A vizsga az elméleti tudást, és annak alkalmazási készségét méri. Akinek megvan az aláírása, jogot szerzett arra, hogy a vizsgán bizonyítsa tudását. A fentiek szerint a vizsgajegybe a félév során szerzett pontok is beszámítanak, ezért, akinek kevés pontja van, legfeljebb jó jegyet szerezhetsz. Ez a megszerzett jegy bekerül az indexbe, de ez a jegy is a TVSZ szerint javítható, külön vizsgával. Ez a vizsga az itt leírtaknál nehezebb feladatokat is fog tartalmazni. Ilyen vizsga esetében a konkrétumokat mindenképpen célszerű személyesen egyeztetni, hiszen mindenkinek más-más anyagrész a javítandó a félévközi feladatokból.

Az elégtelen érdemjegyet szerző hallgató e jegyét a vizsga ismétlésével javítja, ekkor is a NEPTUN-ban újra jelentkezni kell. Egy tárgyból összesen két vizsgát lehet tenni.

2.2 Írásbelivel kapcsolatos általános tudnivalók

Az írásbeli az előadáson elhangzott elméleti anyagból és gyakorlati feladatokból is áll. Az írásbeli vizsga két, körülbelül 40 perces részből áll: az első rész definíciók és tételek kimondása, elégséges szintű bizonyítások, és feladatok.

A második rész nehezebb bizonyítású tétel kimondása és bizonyítása, összetettebb definíciók és tételek kimondása. Csak akkor kerül értékelésre, ha az első rész elégséges (legalább 50%).

Az elégséges szintet az alábbiakban részletesen, a további szinteket mintákkal ismertetem. Előjáróban elmondható, hogy például a vektoralgebrában, determinánsok elméletében, mátrixalgebrában szereplő tételek, valamint a függetlenséghez kapcsolódó bevezető tételek könnyebbnek számítanak, mert a definíció alapján közvetlenül beláthatók. (Ugyanakkor a determináns definíciója „nehéz”).

Az elméleti részben az előadáson elhangzott tételek, definíciók és a tételek bizonyításai (csak amiket előadáson megbeszéltünk) szerepelnek. A definíciókat és a tételek kimondását nagyon pontosan, szó szerint kell tudni!

Elégségest az kaphat, aki MINDEN kérdezett DEFINÍCIÓT, TÉTELT HIBÁTLANUL LEÍR, és LEGALÁBB KÉT TÉTELT HIÁNYTALANUL BIZONYÍT, és összességében 50% körül teljesít a vizsgán.

Az írásbelin szereplő feladatok lehetséges típusai: - igaz-hamis választásos feladatok

- egyéb feleletválasztásos

- elmélethez szorosan kapcsolódó alapfeladatok

A témák szerinti részletes felsorolás alább, a 3. pontban található.

Az írásbeli eredményhirdetésén kötelező megjelenni, ugyanis ekkor osztjuk be a szóbelire jelentkezőket. Aki ezt elmulasztja, a szóbeli javításhoz való jogát elveszíti. Az eredményhirdetés időpontját a vizsga megkezdésekor közöljük.

Várható eredményhirdetési időpontok: kevés vizsgázó esetén a vizsga után 2-3 óra, sok vizsgázó esetén másnap reggel, Neptunban is olvasható.

2.3 A szóbelivel kapcsolatos tudnivalók

A szóbelin főleg tételek kimondása és bizonyítása szerepel. Lehetséges egy-egy témakörrel való beszélgetés is.

A szóbeli az írásbeli eredményének kihirdetése után lehetséges, általában az írásbeli vizsgát követő napon. Határesetben az eredményhirdetéskor 1-1 rövid kérdés várható. Az írásbeli eredményétől függően a szóbeli nem mindenkinek kötelező, de elégtelentől különböző írásbelit írt hallgató jogosult szóbeli vizsgát tenni. Szóbeli esetén a szóbeli, az írásbeli és az évközi zárthelyik eredményei EGYÜTTESSEN határozzák meg az indexbe bekerülő jegyet. Szóbelin tehát nemcsak javítani lehet.

2.4 A tanulásról

Hasznos a saját előadás jegyzet alapján tanulni. A honlapon megtalálható az előadásokon elhangzott anyag nagy része, ezeket meg kell tanulni.

Káros mások által kidolgozott anyag alapján tanulni. Esetleg **ismétlésképpen javasolható** mások által kidolgozott anyag használata. **Ennek oka, hogy a tanulási folyamat NEM RÖVIDÍTHETŐ le, nincsen „királyi út”.** Azok az anyagok, melyek esetleg a wikin szerepelnek, nem mérvadóak. A wikit jószándékú, segítőkész hallgatók szerkesztik, de a felkerült anyagok nincsenek (és nem is lesznek) ellenőrizve, kivéve a konzulensek és az előadó által közösen kialakított példatár. Kérem, olvassák el a matematika tanulással kapcsolatos [általános tanácsot](#) is.

Külön szeretném felhívni a figyelmet arra, hogy az alvás lerövidítése a vizsgaidőszakban igen komoly egészségi problémákhoz vezethet! A fegyelmezett, rendszeres életvitel kialakításával, napi 7-8 óra (vagy több:) éjszakai alvással érhető el a legjobb eredmény.

3. Írásbeli és szóbeli részletesebb ismertetése

3. 1 Írásbeli részletes ismertetése, mintafeladatok listája

Az írásbeli első része definíciók, tételkimondások és elégséges szintű tételek bizonyításaiból áll. Fontos, hogy **legalább két tételt kell tudni bizonyítani az elégségeshez**. Az írásbeli második része a közepes illetve jó/jeles szintű tételek bizonyításaiból, közepes/jó szintű problémák megoldásából áll.

A harmadik rész a szóbeli, általában másnap, melyen az eső két részre megajánlott jegyet lehet javítani (**rontani** is lehet, de ez nem jellemző, mert a hallgatók általában tisztában vannak saját tudásukkal). Határesetben rövid kérdés az eredményhirdetéskor előfordulhat.

Elégséges szinthez feladat típusok

Elégséges szinten a feladatnak a vizsgán az a szerepe, hogy az adott definíció megértését mérje. Ezért ezek nagyon egyszerű feladatok, többnyire a definíciók direkt, egyszeri alkalmazásával megoldhatók. Azon hallgatók kedvencei, akik értik is és jól tudják alkalmazni a tudásukat, de nehezebben öntik szavakba őket.

Minden feladatra vonatkozik, hogy nem igényel hosszabb számolást, hanem az elmélet ötletes felhasználását. Ha valaki bonyolult számításba keveredik, akkor biztosan nem jó utat választott, melynek oka az elmélet nem megfelelő szintű ismerete.

Néhány lehetséges feladat típus (a lista nem teljes, más ilyen szintű is lehet):

1. Determináns kiszámítása a kifejtési tétel szerint, ferde kifejtés illusztrálása. Nagyobb méretű (3×3 , 4×4 -es) determináns esetében a determinánsra vonatkozó tételek közül 2-3 alkalmazása (pl. ha van nulla sora, vagy ha egyik sora másik számszorosa). Gauss eliminációval determináns kiszámítása.
2. 2×2 -es mátrix inverzének számítása a képletből fakadó egyszerű „recepttel”.
3. Lin. függetlenség/lin.függőség felismerése.
4. Adott vektortér egy bázisának megadása, vektor koordinátáinak felírása adott bázisban.
5. Bázis felismerése, bizonyítása, megadása.
6. Generátorrendszer felismerése, bizonyítása, megadása
7. Két, koordinátaival adott vektor összegének, skalárszorosának (számszorosának) számítása
8. Skalárszorzat számítása kanonikus bázis (i, j, k) esetén.
10. Vektoriális szorzat számítása kanonikus bázis (i, j, k) esetén.
11. Vektorok bezárt szöge, vetülete
12. Háromszög és paralelepipedon adatainak számítása: kerület, szögek/terület, térfogat.
13. Sík egyenletének felírása
14. A sík és a tér leképezéseinek mátrixai: 2-3 dimenzióban a megadott leképezés mátrixának megadása, adott mátrix esetében annak eldöntése, milyen geometriai leképezést ad meg, adott leképezés esetében annak eldöntése, hogy homogén lineáris-e (pl. a deriválás, integrálás, stb.).
15. Altér felismerése, vektorok halmazáról bizonyítani, hogy alteret alkotnak
16. Képtér, magtér megadása egyszerűbb esetekben (pl. 3 dimenzióban k bázisvektorral párhuzamosan, i és j síkjára vetítjük a tér vektorait, mi lesz a képtér, mi lesz a magtér?)
17. Dimenzió tétel illusztrálása
18. Sajátértékek kiszámítása egyszerű esetekben, definíció alapján, ill. mátrix algebra segítségével. Sajátvektorok szögének számítása.

19. Mátrixok szorzása, összeadása, skalárszorosa. Szöveges feladatok megoldás mátrix segítségével.
20. Lináris egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével.

3.2 Tételek szintezett listája

Elégéses szintű tételek, melyeknek bizonyítását is mindenkinek tudnia kell (**a felsorolás teljes**)

1-7. Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalmának közvetlen következményei. (7 könnyű, de fontos tétel: függőség definíciójának miért szinonimája a kifejezhetőség, függő rendszerhez hozzáveszünk vektort..., független rendszerből elhagyunk vektort..., független rendszerhez vektort hozzávéve függővé válik..., vektort más vektorok lineáris kombinációjaként felírva, a felírás akkor és csak akkor egyértelmű, ha.... Ezen utóbbi következményeként annak indoklása, hogy miért bázist kell használni a vektorok megadásakor, miért egyértelmű a koordináta fogalma)

8. A kicserélési tétel szerint a generátorrendszer elemszáma és bázis elemszáma közti kapcsolat felhasználásával annak bizonyítása, hogy egy adott vektortérben bármely bázisnak egyenlő számú eleme van.

9.-11. 3 dimenzióban, kanonikus bázisra vonatkozó koordinátákkal adott vektorok skalárszorzatára, vektoriális szorzatára, vegyes szorzatára vonatkozó tételek.

12-14. Skalárszorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat geometriai jelentésének bizonyítása (3 tétel)

15. Sík normálvektoros egyenletének levezetése.

16. Két 3 dimenziós vektor akkor és csak akkor merőleges, ha skalárszorzatuk 0, akkor és csak akkor párhuzamos, ha vektoriális szorzatuk nulla (2 tétel).

17-19. A képtér, a magtér maga is vektortér (ti. altér) Egy adott sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak. (3 apró, uo. elv alapján bizonyítható tétel)

20. Mátrix hatványainak, inverzének sajátértékei.

21. A determináns definíciójából közvetlenül adódó determináns tulajdonságok (pl. ha egy sora nulla, ha egy sora kéttagú összeg)

22. Egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével.

23. Lineáris leképezés mátrixának felírása, nemcsak kanonikus bázis esetén

Közepes és jó szint

Természetesen az elégségesnél jobb jegy eléréséhez tudni kell az elégséges szinten felsoroltakat is. A közepes szintű tételek általában olyan tételek, ahol több definíciót, vagy több egyszerűbb tételt kell együttesen, vagy egymás után alkalmazni, de könnyen átláthatók, „kézzel foghatók”.

Példák közepes szintű tételekre, melyeket bizonyítani kell (a felsorolás nem teljes):

3 x 3-as mátrixon levezetni a mátrix és adjungáltja szorzatának eredményét, vektoriális szorzat kiszámítására vonatkozó képlet, a determináns ferde kifejtési tétel 3 x 3 –as determináns esetén. A leképezés mátrixa. A vektortér axiómák következményei. Altér bizonyításához szükséges és elégséges feltétel (műveletre, skalárszorosra zárt). Sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrixa diagonális. A lineáris leképezések esetében a null elem képére vonatkozó állítás és annak levezetése a lineáris tér axiómáiból. A vektortér axiómák következményeinek bizonyítása.

Jó és jeles szint

A jó és jeles közti különbség nehezen mérhető. Mindkét szint a tananyag átfogó, mély ismeretét követeli, tehát lényegében mindent tudni kell, jó szint esetén kisebb „megingások” lehetnek. A jó és jeles szintű tételek esetében több definíciót és tételt kell kombinálni. A jó követhet el apróbb hibákat, melyet kérdésre ki tud javítani, a jeles önállóan bizonyít, értekezik az adott témáról.

Természetesen a jó/jeles jegy eléréséhez tudni kell az elégséges és közepes szinteken felsoroltakat is.

Példa jó és jeles szintű tételekre, melyeket bizonyítani kell (a felsorolás nem teljes):

- kicserélési tétel
- dimenzió tétel
- determináns kifejtési tétel
- inverz mátrix számítása Gauss eliminációval
- homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldásának feltétele

Példa jeles szintű feladatra, problémára: Bizonyítsa be, hogy valamely transzformáció különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok függetlenek.

Sikeres felkészülést kívánok!

Budapest, 2014.dec. 20.

Bércesné dr. Novák Ágnes
egyetemi docens