
4. Vektoralgebra

Az előző fejezetekben is már felelevenítettünk néhány, a vektorokkal kapcsolatos ismeretet. Kicsit általánosabban összefoglaljuk a már tanultakat, és sok új, a későbbiek szempontjából fontos fogalmat is bevezetünk.

Nagyon fontos a vektorok e 4. fejezetben leírt tulajdonságainak megértése, ugyanis a vektor fogalmát ezen tulajdonságok alapján fogjuk általánosítani. A jegyzet további részeinek zömében ezen általános vektor fogalmat használjuk majd. A vektor általános fogalma nem mindig lesz geometriailag közvetlenül szemléltethető, ezért lényeges e fejezet anyagának készség szintű elsajátítása.

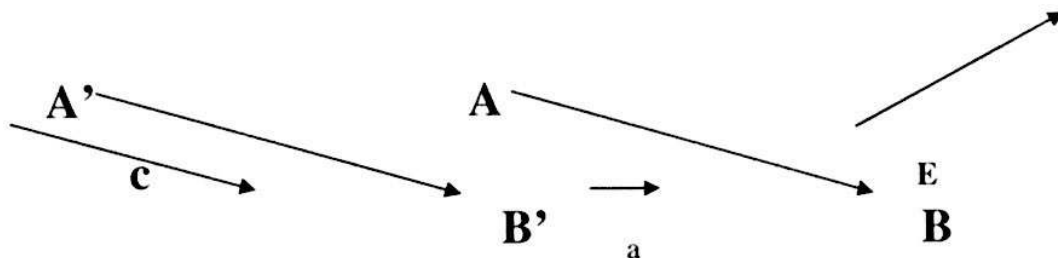
A vektorokkal kapcsolatos **számítások összességét vektoralgebrának** nevezzük. Ezeket a számításokat először lényegében geometriai alapon vezetjük be. Megismerkedünk a tulajdonságaikkal, majd a későbbi fejezetekben bevezetjük a koordináta fogalmát. Ezután újra áttekintjük a már ismert műveleteket, függvényeket, és a koordináták segítségével is megadjuk számítási módjukat.

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a tér vektoraival foglalkozunk. Természetesen, ha csak két vektorról van szó, a két vektor mindig egy síkot határoz meg. Ez megkönnyíti az ábrázolásukat, ekkor a jegyzet lapja lesz ez a sík. A térbeli vektorokat a szokásos perspektívikus módon ábrázoljuk.

Definíció: Az **irányított szakaszt vektornak** nevezzük.

A vektorokat sokféleképpen jelölhetjük. Szokás vastag betűvel jelölni, pl.: $\mathbf{c}$. De kiírhatjuk a kezdőpontjukat és a végpontjukat, pl.: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$. Gyakran használatos a szakkönyvekben a vastaggal szedett és aláhúzott $\underline{\mathbf{c}}$, vagy dőlten szedett és aláhúzott jelölés is: $\underline{\mathbf{c}}$. A szakaszokat is szokás így jelölni, ezért ez esetben mindig hozzá is tesszük a vektor szót: $\overrightarrow{AB}$ vektor. Ezen utóbbi felírásban mindig a kezdőpont szerepel először, és a végpont másodszor. Ábrán a vektor irányát a végponthoz rajzolt nyíl jelzi.



Mikor tekintünk egyenlőnek két vektort? A vektort nemcsak az irányított szakasz hossza, hanem természetesen az iránya is jellemzi. A fizikában sok esetben nagyon fontos az is, hogy pl. egy erő képviselő vektor **kezdőpontja**, az ún. **támadáspont** hol van. A matematikában másfajta problémák megfogalmazására használjuk a vektorokat, és ezeknél nem fontos ez az adat. Ezért különbséget teszünk: ún. **szabad vektorokról** beszélünk, ha a vektor **kezdőpontja nem lényeges**, **kötött vektorokról**, ha a **kezdőpont helyzete fontos**. E fejezetben (és az egész jegyzetben) szabad vektorokról van szó. Ezért egyenlőségüket is a figyelembe vett két adat alapján állapítjuk meg.

Definíció: Két vektor **egyenlő**, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

Például az előző ábrán az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{A'B'}$ vektorok egyenlők, a többi nem.

A c vektor **párhuzamos** az AB és az $A'B'$ vektorokkal. Vektorok párhuzamosságát a szokásos módon jelöljük: $c \parallel AB$. Párhuzamos vektorok vagy **egyező**, vagy **ellentétes** irányúak.

4.2. Vektorok összeadása és szorzatai

Ebben a fejezetben a vektorokkal kapcsolatos elemi számítási ismereteket foglaljuk össze. Van közöttük művelet, de van közöttük függvény is.

4.2.1 Vektorok összeadása

A vektorokat a középiskolában megismert geometriai módszerrel adjuk össze.

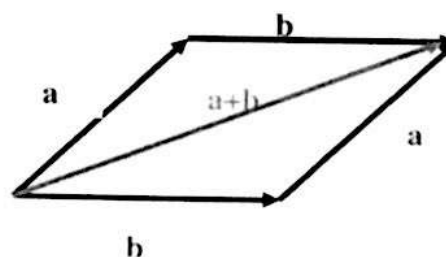
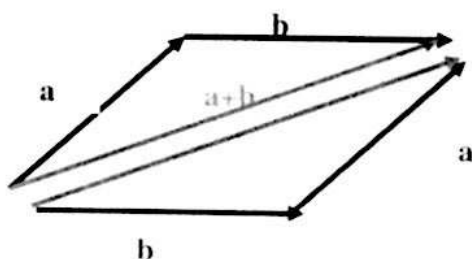
Definíció: Az a és a b vektorok **összegét** úgy kapjuk, hogy a b vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az a vektor végpontjához kerüljön. Az a vektor kezdőpontját és a b vektor végpontját összekötő vektor az a és a b vektorok összege.

Megjegyzés: Ezt a fajta összeadást nyílfolyamnak módszernek is nevezik.

A vektorok összeadása **kétváltozós művelet**: két vektorhoz egy harmadik vektort rendel. A definícióból első látásra úgy tűnhet, hogy a két vektor szerepe nem egyforma. A következő ábra azt illusztrálja, hogyha a definícióban felcseréljük az a és a b vektorok szerepét, akkor ugyanahhoz az összegvektorhoz jutunk.

Tétel: Vektorok összeadása kommutatív: $a+b=b+a$.

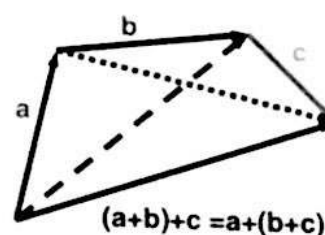
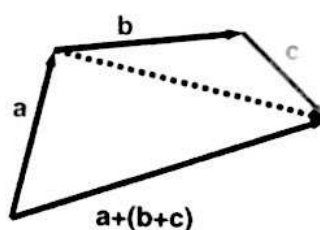
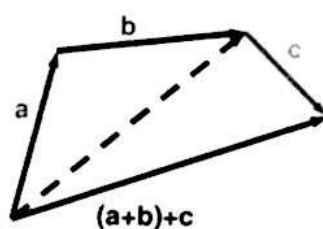
A bizonyítás az ábrákról leolvasható: a paralelogramma két szemkötti oldala párhuzamos és egyenlő, ezért az a -val illetve b -vel jelölt vektorok valóban egyenlők. A paralelogramma átlója, mint összegvektor kétféleképpen jöhet létre: $a+b=b+a$.



A vektorok összeadását tehát úgy is lehetett volna definiálni, hogy közös kezdőpontból felrajzolva őket, összegük a keletkező paralelogramma közös kezdőpontból kiinduló átlója, melynek kezdőpontja szintén a közös pont. Ezt a fajta összegzési módot **paralelogramma módszernek** is nevezik.

Tétel: Vektorok összeadása asszociatív: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Bizonyítás: Az összeg szerkesztésekor az előírt módon létrehozva a vektorok összefűzését, a kezdő- és végpontok rögzítettek. Mindegy ezért, hogy milyen sorrendben adjuk össze a vektorokat, hiszen az összegvektor mindig az a vektor kezdőpontjából a c vektor végpontjába mutat.



A mátrixok esetében is megnéztük, van-e olyan mátrix, melyet bármely mátrixhoz hozzáadva a mátrix elemei nem változnak? Másképpen, van-e az összeadás művelethez inverz elem?

Definíció: A **nullvektor** kezdőpontja és végpontja ugyanaz a pont, iránya pedig **definíció szerint tetszőleges**. Jelölése: **0**.

Nyilvánvaló, hogy a nullvektor abszolút értéke nulla. Ha ábrázolnánk, képe csak egy pont lenne.

Ezért általában nem is ábrázoljuk.

Ez a „pont” itt a nullvektor: $\cdot$

Tétel: A vektorokon értelmezett összeadás műveletnek létezik **egységelem**: $\mathbf{a} + \mathbf{e} = \mathbf{a}$. Ez az **egységelem a nullvektor**: **0**.

Bizonyítás: Az összeadás definíciójából következik, hogy az **e** egységelem kezdőpontját az **a** vektor végpontjához kell illeszteni, és az összegvektor az **a** kezdőpontját köti össze az **e** egységelem végpontjával. De az összeg szintén **a**. Tehát az **e** egységelem hossza csak nulla lehet. Mivel a nullvektor iránya tetszőleges, ezért $\mathbf{e} = \mathbf{0}$.

Ha van egységelem, értelmes feltenni a kérdést, hogy vajon létezik-e inverz elem is? Van-e minden **a** vektorhoz olyan $\mathbf{a}^{-1}$ vektor, hogy azt **a** vektorhoz adva nullvektort kapunk? Az igenlő választ a következő tételben mondjuk ki.

Tétel: Minden **a** vektorhoz van olyan $\mathbf{a}^{-1}$ vektor, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás: Ha az összeadás definíciója szerint az **a** vektor végpontjához egy olyan vektort fűzünk, melynek az **a** vektor végpontja a kezdőpontja, és végpontja az **a** vektor a kezdőpontja, akkor a nullvektor lesz e két vektor összege.

Mivel a bizonyításban szereplő vektor **a**-val párhuzamos, de azzal ellentétes irányú, ezért ezt ellentett vektornak nevezzük.

Definíció: Az **a** vektor összeadásra vonatkozó $\mathbf{a}^{-1}$ inverz elemét, az **a vektor ellentettjének** nevezzük és $(-\mathbf{a})$ -val jelöljük.

Összefoglaljuk az összeadás tulajdonságait.

Vektorok összeadásának tulajdonságai

Bármely **a**, **b**, **c** vektorra a következők igazak:

1. Kommutatív : $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. Asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. Létezik egységelem: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. Létezik inverz (ellentett) elem: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

4.2.2 Vektorok különbsége

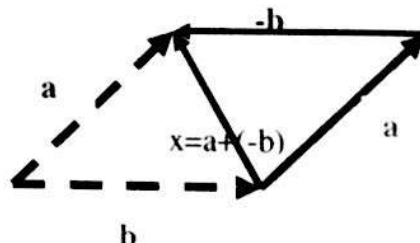
A különbség jelentése például az $x+b=a$ vektoregyenletből tisztázható. Ha x , b és a valós számokat jelentenének, akkor $x=a-b$ az egyenlet megoldása. Ez a már megszokott egyenletrendezés készlet arra, hogy megvizsgáljuk, vajon vektoroknál is lehet-e az egyenletet így rendezni?

Ha két vektor, nevezetesen az egyenlet bal- és jobboldalán szereplő vektorok egyenlők, akkor hozzáadva mindkét oldalhoz ugyanazt a vektort, továbbra is egyenlő lesz a két oldal. Adjuk a vektoregyenlet mindkét oldalához a $(-b)$ vektort, a b ellentett vektorát:

$$x+b+(-b)=a+(-b)$$

$$x+0=x=a+(-b)$$

$$\text{Jelölés: } a+(-b)=a-b=x$$



Tehát az a és a b vektorok különbsége az az x vektor, amely az a vektor és a b ellentett vektorának összege. Ha az a , b vektorokat közös kezdőpontból rajzoljuk fel, akkor a különbségvektor a vektorok által kifeszített paralelogrammának a kisebbítendő, vagyis az a vektor végpontjába mutató átlóvektora. (E paralelogramma másik átlója, mely a közös kezdőpontból indul ki, az a és a b vektor összege.)

Jelölés: $a+(-b)=a-b=x$

4.3 Vektorok szorzatai

A vektorokkal kapcsolatosan a gyakorlatban négy olyan számítási séma terjedt el, melyek elnevezésében a szorzattal kapcsolatos szavak szerepelnek. Ezek közül azonban csak az egyik művelet.

Vektor valós számmal való szorzását a mátrixokéhoz hasonlóan **számszoros**nak nevezzük. Mivel a valós számokat szokás skalároknak is nevezni, a **számszoros és skalárszoros** szavak ugyanazt a függvényt jelölik. Ez esetben egy vektorhoz és egy valós számhoz egy vektort rendelünk, ezért ez nem művelet, hanem **függvény**.

Nagyon körültekintően kell használni az elnevezéseket, ugyanis a fent említetthez nagyon hasonlóan hangzik két vektor **skalárszorzata**. Ez a **függvény** a két vektorhoz valós számot rendel.

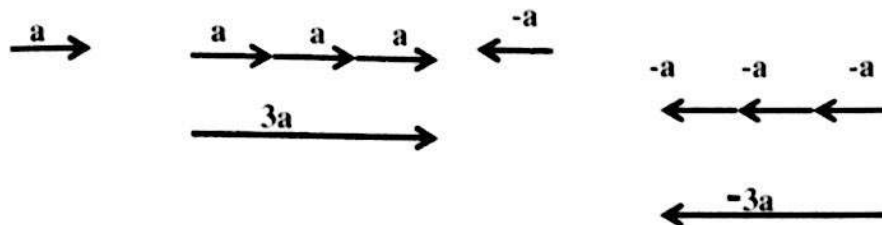
Két vektornak értelmezhető **vektoriális szorzata** is, ez **művelet**, mivel a vektorokhoz vektort rendel. Másrészt ez függvény is: ez a függvény az egyetlen művelet az itt felsorolt, szorzattal kapcsolatos függvények között.

Három vektornak értelmezzük majd a **vegyes szorzatát**, ez a függvény a skalárszorzat és a vektoriális szorzat alkalmazásával számot rendel a három vektorhoz.

A további alfejezetekben rendre megismerkedünk a felsorolt függvényekkel.

4.3.1 Vektor számszorosa

Az $\mathbf{a}$ vektor számszorosát, ha ez a szám egész szám, a vektor ismételt összeadásával értelmezzük. Az alábbi ábrán az $\mathbf{a}$ vektor 3-szorosa, illetve $-\mathbf{a}$ vektor 3-szorosa látható:



Ezen ismételt összeadást tehát az jellemzi, hogy pozitív egész számszoros esetén a vektor hossza λ számszorosa változik, iránya az eredeti $\mathbf{a}$ vektorral egyező irányú. Negatív számszoros esetében tulajdonképpen az eredeti vektor ellentettjének pozitív számszorosát vesszük. Ennek indokát mindjárt látni fogjuk.

Definíció: Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ vektor. Az $\mathbf{a}$ vektor számszorosa az a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ -val jelölt vektor, amelyre:

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \begin{cases} \nearrow & \text{ha } \lambda \geq 0, \mathbf{a}\text{-val egyirányú, hossza: } |\lambda \mathbf{a}| = \lambda |\mathbf{a}| \\ \searrow & < 0, \mathbf{a}\text{-val ellentétes irányú, hossza: } |\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \end{cases}$$

Az összeadásra vonatkozó ellentett elemről tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$ vektorral ellentétes irányú, és $|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}|$. Mivel az inverz elem egyértelmű, és a számszoros definíciója szerint a $(-1)\mathbf{a}$ vektor egyenlő $-\mathbf{a}$ -val, igaz a következő lemma.

Lemma: Az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje, az $\mathbf{a}$ vektor (-1) szerese: $(-\mathbf{a}) = (-1)\mathbf{a}$

Sokszor használatos az alábbi lemma is.

Lemma: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha van egy olyan λ valós szám, amelyekkel egyik vektor felírható a másik λ -számszorosaként: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$

Bizonyítás:

Először azt bizonyítjuk, ha $\mathbf{a}$ vektorok párhuzamosak, akkor van egy ilyen λ valós szám. Legyenek először a vektorok egyirányúak is. A párhuzamos irányt megadhatjuk egy egységnyi hosszú vektorral, legyen ez $\mathbf{e}$. Ezzel mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektor felírható:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e} \text{ és } \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \mathbf{e}.$$

Egységnyi hosszú, $\mathbf{b}$ irányú vektort kapunk, ha $\mathbf{b}$ -t megszorozzuk $(1/|\mathbf{b}|)$ -vel. Ezt $\mathbf{e}$ -be helyettesítve:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| (1/|\mathbf{b}|) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$$

Amennyiben a vektorok ellentétes irányúak, akkor egyikük egyirányú az $\mathbf{e}$ vektorral, legyen ez az $\mathbf{a}$ vektor. Ekkor:

$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}$ és $\mathbf{b} = |\mathbf{b}| (-1)\mathbf{e}$, hiszen a számszoros definíciója szerint $(-1)\mathbf{e}$ ellentétes $\mathbf{e}$ -vel, de hossza ugyanakkora, tehát $|\mathbf{e}| = 1$. Ezért:

$$\mathbf{a} = (-1)|\mathbf{a}| (1/|\mathbf{b}|) \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda = -|\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$$

Másodszor azt tekintjük, hogy $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$. Ekkor azonban a definíció miatt $\lambda \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$.

A fenti lemma bizonyításában az $\mathbf{e}$ vektor hossza egységnyi volt. Sokszor használunk ilyen tulajdonságú vektorokat, s ezt a nevükben jelezzük.

Definíció: Amennyiben $|\mathbf{e}|=1$, akkor az $\mathbf{e}$ vektort **egységvektornak** nevezzük.

Megjegyzés: Az egységvektor elnevezésnek semmi köze nincsen a műveletek egység elemeihez.

A számszoros tulajdonságai

Rögzítjük, hogy $1\mathbf{a}$ ugyanazt jelenti, mint $\mathbf{a}$. Ez formális megállapodás. Érvényes a **vegyes asszociatív szabály**: $\mu(\lambda\mathbf{a})=(\mu\lambda)\mathbf{a}$. Ennek igazsága közvetlenül a definícióból adódik. Ugyanis az egyenlőség két oldalán lévő vektorok hossza egyformán az $\mathbf{a}$ vektor hosszának $\mu\lambda$ -szorosa. Az irányuk, amennyiben egyik szám negatív, mindkét oldalon $\mathbf{a}$ -val ellentétes irányú, ha mindkettő negatív, vagy mindkettő pozitív, akkor $\mathbf{a}$ -val egyirányúak, így valóban egyenlők.

A **vegyes disztributív szabályok** is igazak, melyek közül az egyik: $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$. Ez a szabály azért érdekes, mert a baloldalon valós számok, a jobboldalon pedig vektorok összeadása szerepel. A $+$ jel a baloldalon és a $+$ jel a jobboldalon nem ugyanazt a műveletet jelenti. Amennyiben λ és μ nem negatívak, akkor a bal oldali vektor is, jobboldali vektor is $\mathbf{a}$ -val párhuzamos és egyirányú, hossza $|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}|+|\mu\mathbf{a}|=\lambda|\mathbf{a}|+\mu|\mathbf{a}|=|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|$.

Felhasználva a számszoros definícióját, a vektor abszolút értékének jelentését és a nem negatív számok abszolút értékére vonatkozó ismereteket.

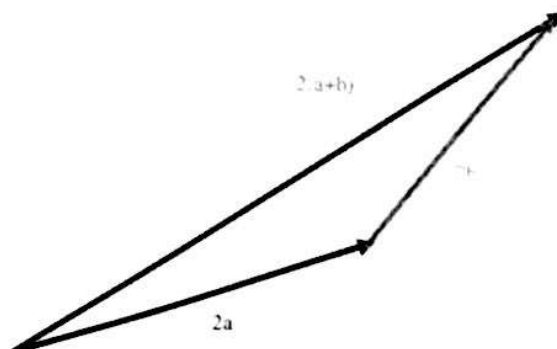
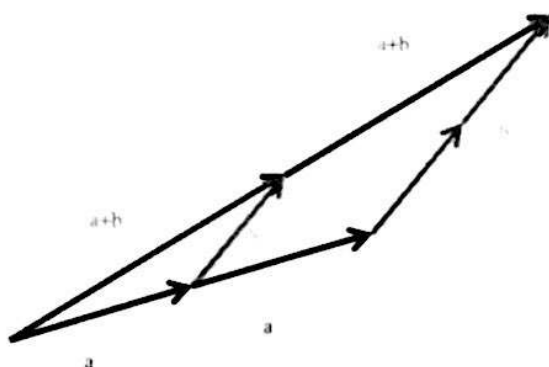
Ha mindkét szám negatív:

$$|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}|+|\mu\mathbf{a}|=-\lambda|\mathbf{a}|-\mu|\mathbf{a}|=|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|.$$

Ha egyik szám negatív, pl. μ , akkor:

$$|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}|=|\lambda\mathbf{a}|+|\mu\mathbf{a}|=\lambda|\mathbf{a}|-\mu|\mathbf{a}|=|(\lambda+\mu)\mathbf{a}|.$$

A **másik disztributív szabály**: $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$. E szabályban mindkét oldalon a $+$ jel vektorok összeadását jelenti. A baloldalon az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor λ -szorosát vesszük. A jobboldalon mindkét vektor λ -szorosának összege szerepel. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontból felrajzolva, illetve a $\lambda\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{b}$, $\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ vektorokat is ugyanezen kezdőpontból felrajzolva az állítás a párhuzamos szelők tételéből adódik.



Összefoglaljuk a vektor számszorosának tulajdonságait:

Vektor számszorosának tulajdonságai

a, b, c vektorokat, μ, λ valós számokat jelöl

1. $1a=a$

2. **vegyes asszociatív szabály:** $\mu(\lambda a)=(\mu \lambda)a$

3. **vegyes disztributív szabályok:**

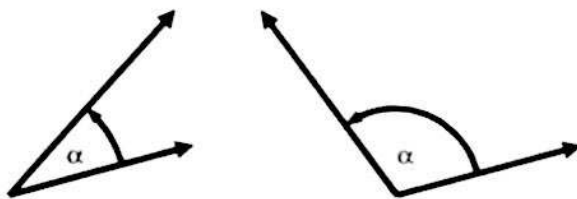
$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$$

$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$$

4.3.2 Skalárszorzat (belső szorzat)

Amint azt már fentebb említettük, a skalárszorzat függvény; két vektorhoz egy valós számot rendel. Angolul „dot product” (magyarul pont szorzat) vagy „inner product” (magyarul belső szorzat) a neve. A definícióhoz tudnunk kell, mit értünk két vektor által bezárt szögön.

Két vektor által bezárt α szög: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

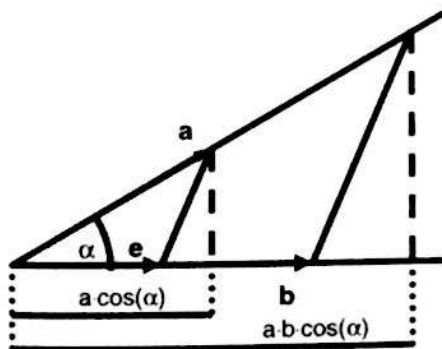


A két vektort közös kezdőpontba rajzolva egy nagyobb és egy kisebb szög közül választhatunk. Az a megállapodás, hogy mindig a kisebbik szöget tekintjük a két vektor által bezárt szögnek.

Ha a bezárt szög 0° vagy 180° , akkor a vektorok párhuzamosak: 0° esetén egyirányúak, 180° esetén ellentétes irányúak.

Most már készen állunk a skalárszorzat megfogalmazására.

Definíció: Az a és b vektorok **skalárszorzatán** azt az $a \cdot b$ -vel jelölt számot értjük, amelyre $a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög.



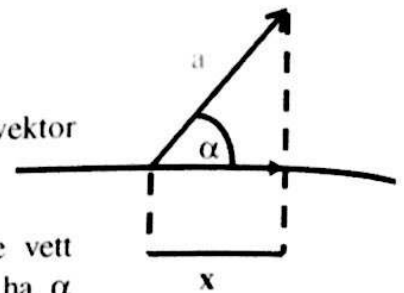
Az ábrán megszerkesztettük a skalárszorzatot.

Mostani tudásunk alapján szokatlan módon tudnánk ezt a számot kiszámítani, meg kellene mérni hozzá a vektorok hosszát és a közbezárt szöget, hiszen a vektorokat eddig ábrájukkal adtuk meg. A konkrét kiszámítási módot a vektorok koordinátás alakjának ismertetése után tanuljuk.

Ha nem okoz félreértés, gyakran az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzatot ab -vel jelöljük.

A skalárszorzat geometriai jelentése

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $\mathbf{e}$ -vel jelölt egyik vektor egységvektor:



$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{e}| \cdot \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = x$, amely az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ -re vett előjeles merőleges **vetületének előjeles hossza** (negatív, ha α

Ha az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ skalárszorzatot szeretnénk megszerkeszteni, akkor legyen az $\mathbf{e}$ egységvektor $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos, ekkor az x vetület $|\mathbf{b}|$ -szeresét kell megszerkeszteni:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (|\mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}) = |\mathbf{a}| \cdot (|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{e}|) \cdot \cos \alpha = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha = x \cdot |\mathbf{b}|$$

Érdekes speciális eset, ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ekkor: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$. Ennek az alábbi lemmában kimondott fontos következménye van.

Lemma: Az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ skalárszorzatra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A lemmában megfogalmazott tulajdonságot így is mondják: a **skalárszorzat pozitív definit**. További érdekes speciális eseteket kapunk, ha válaszolunk az alábbi kérdésekre.

Feladatok: Számítsa ki az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárszorzatot, az alábbi esetekben:

- $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$
- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ és $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$

A skalárszorzat tulajdonságai

A skalárszorzat **tényezői felcserélhetők**, vagyis érvényes, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. Ha művelet lenne a skalárszorzat, akkor ezt a tulajdonságot kommutatív-nak neveznénk. Mivel a skalárszorzat „csak” függvény, ezért az erre az esetre használatos szakszót használjuk: **szimmetrikus**. Ez a tulajdonság a definíció közvetlen következménye, hiszen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \alpha = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

A skalárszorzat **nem asszociatív**: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, ugyanis a baloldalon $\mathbf{c}$ vektor számszorosa, a jobb oldalon pedig az $\mathbf{a}$ vektor számszorosa áll. A baloldal tehát $\mathbf{c}$ -vel, a jobboldal pedig $\mathbf{a}$ -val párhuzamos vektor, így általában nem egyenlők.

Feladat: Határozza meg, mely speciális eset(ek)ben lehet igaz az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ egyenlőség?

Ha a **skalárszorzat számszorosát** tekintjük, akkor a következő teljesül: $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$. Nyilvánvaló, ha $\lambda = 0$, akkor az azonosság fennáll. Továbbá a szimmetria miatt elegendő a $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ azonosság bizonyítása. Ez a tulajdonság az ún. **homogén** tulajdonság.

Ha $\lambda > 0$, akkor a

$$\text{BALOLDAL: } \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \lambda (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)$$

$$\text{JOBBOLDAL: } (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (|\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha) = \lambda (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)$$

Ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda = (-1) |\lambda|$, emiatt elegendő a $\lambda = (-1)$ eset tárgyalása:

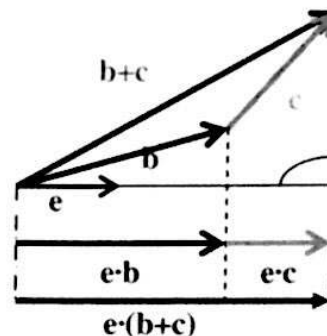
BALOLDAL: $(-1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (-1) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$

JOBBOLDAL: $(-1)\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(180^\circ - \alpha) = (-1) |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$

A skalárszorzat az összeadásra nézve **lineáris**: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (Ez az elnevezés is a függvény tulajdonság hangsúlyozásából fakad: **disztributív**nak neveznénk, ha művelet lenne a skalárszorzat.) Ezt a következőképpen lehet bizonyítani. Mivel minden a vektorra ha $\mathbf{e} \parallel \mathbf{a}$, akkor $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{e}$. Tehát az

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \text{összefüggés helyett elegendő a} \\ \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} & \text{belátása, ugyanis} \\ \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{c} & / \cdot \lambda \\ \lambda \cdot \mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\lambda \mathbf{e}) \cdot \mathbf{b} + (\lambda \mathbf{e}) \cdot \mathbf{c} & \text{amiből: } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

A $\mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}$ egyenlőséget a skalárszorzat geometriai jelentése alapján bizonyítjuk: Az ábráról leolvasható, hogy az $\mathbf{e} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ skalárszorzat, ami nem más, mint az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$ -re vett merőleges vetülete, egyenlő az $\mathbf{a}$ vektor merőleges vetületének és a $\mathbf{c}$ vektor merőleges vetületének összegével, vagyis skalárszorzataik összegével: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{c}$.



Fontossága miatt a merőlegesség kritériumát a következő tételben fogalmaztuk meg. Az euklideszi terekről szóló fejezetben ezt a tulajdonságot fogjuk majd az általános vektorok merőlegességének jellemzésére használni.

Tétel: Két vektor skalárszorzata akkor és csak akkor 0, ha a vektorok merőlegesek. Képlettel:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Bizonyítás: Először azt bizonyítjuk, ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ akkor $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$: Ha $|\mathbf{a}| \neq 0$ és $|\mathbf{b}| \neq 0$, akkor $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\alpha) = 0$ csak úgy teljesülhet, ha $\cos(\alpha) = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})_1 \angle = 90^\circ$ vagy $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_2 \angle = 270^\circ$. Mivel a megállapodás szerint a kisebb szöget tekintjük, ezért a két vektor 90° -os szöget zár be. Ha valamelyik vektor nullvektor, akkor a skalárszorzat is nulla. Mivel nullvektor iránya tetszőleges, így a merőlegesség teljesül.

Másodjára azt bizonyítjuk, ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ez a definícióból azonnal adódik: $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot 0 = 0$. (A két vektor merőlegessége teljesülhet úgy is, hogy valamelyikük nullvektor. A bizonyítás erre az esetre is érvényes.)

Összefoglaljuk a skalárszorzat tulajdonságait:

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skalárszorzata függvény:
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$

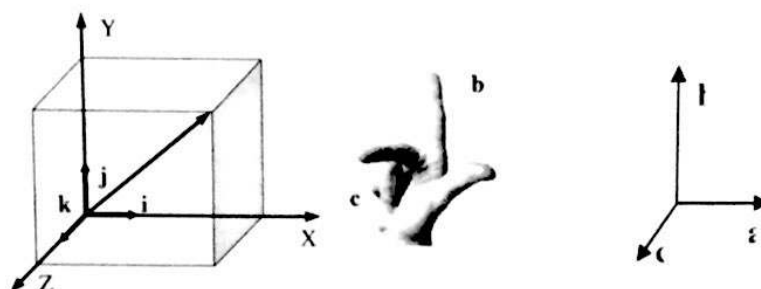
Tulajdonságok:

1. pozitív definit: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$
2. szimmetrikus: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. homogén: $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$
4. lineáris: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4.3.3 Vektoriális szorzat

A szorzat szóval kapcsolatos függvények közül egyedül ez **művelet**, mert két vektorhoz rendel egy harmadik vektort. Szokás kereszt szorzatnak is nevezni, angolul cross product a neve.

A definícióhoz szükség van az ún. jobbrendszer fogalmára. Az ábrán például az **a**, **b**, **c**, páronként merőleges vektorok jobbrendszert alkotnak. Ha az **a** vektort a jobb kezünk hüvelyk-, a **b** vektort mutató-, az **c** vektort pedig középső ujjunkkal tudjuk modellezni, akkor a vektorok ún. jobbrendszert alkotnak.



A matematika nyelvén kicsit bonyolultabb a jobbrendszer megfogalmazása.

Definíció: Az **a**, **b**, **c** vektorok **jobbrendszert** alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket az **c** vektor irányából nézve az **a** vektort π -nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás vigye át a **b** vektor irányába.

Most már meg tudjuk fogalmazni a vektoriális szorzat definícióját.

Definíció: Az **a**, **b** vektorok vektoriális szorzatán azt az **a**×**b**-vel jelölt vektort értjük, amelyre:

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ és
2. Az **a**×**b** vektor **iránya** mind **a**-ra, mind **b**-re merőleges, és velük **jobbrendszert** alkot.

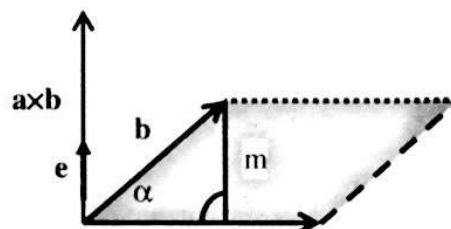
Ha az **e** vektor az **a**×**b** vektor irányával egyező irányú egységvektor, akkor az **a**×**b** vektor definíciója a következő képlettel is megadható:

Definíció: Az **a**, **b** vektorok vektoriális szorzatán azt az **a**×**b**-vel jelölt vektort értjük, amelyre: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}$, ahol $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}$ és **a**, **b**, **e** jobbrendszert alkotnak.

A vektoriális szorzat geometriai jelentése

Az ábrán a kék paralelogramma magassága **m**, amelyre: $m = |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$. A paralelogramma egyik alapja: $|\mathbf{a}|$. Ezért a vektoriális szorzat geometriai jelentése az **a** és a **b** vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha = \text{terület} = (\text{alap} \cdot \text{magasság})$$



Néhány fontos vektoriális szorzat kiszámításához tekintsük az ábrán látható, páronként egymásra merőleges, jobbrendszert alkotó **i**, **j**, **k** egységvektorokat.

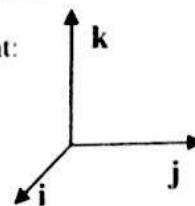
Feladat: A definíció alapján számítsa ki a következő vektoriális szorzatokat:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i}, \mathbf{j} \times \mathbf{j}, \mathbf{k} \times \mathbf{k}, \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \mathbf{k} \times \mathbf{i}$$

Megoldás minta:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \sin 0^\circ \cdot \mathbf{e} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = |\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{k}| \cdot \sin 90^\circ \cdot \mathbf{e} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{i}, \text{ hiszen } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ jobbrendszert alkot, ezért } \mathbf{e} = \mathbf{i}$$



Gyakorlásképpen adja meg az alábbi vektoriális szorzatokat is.

Feladatok: Melyik vektorral egyenlők a következő vektorok: $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$?

A vektoriális szorzat tulajdonságai közül fontos a definícióból közvetlenül adódó egyik szokatlan tulajdonság: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Ez az ún. **antikommutatív** tulajdonság. Ez a jobbrendszer követelményéből fakad.

A szokásos tulajdonságokat vizsgálva az **asszociativitás** sem teljesül: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

A vektoriális szorzat **disztributív** az **összeadásra** nézve: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ és $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$. Két szabályra a kommutativitás hiánya miatt van szükség.

A vektoriális szorzat tulajdonságai

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}$$

1. antikommutatív: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. nem asszociatív: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
3. disztributív:
 - 2.a.) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
 - 2.b.) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

Láttuk, hogy a skalárszorzat akkor és csak akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek. A vektoriális szorzatra is megfogalmazható, milyen tulajdonságú vektorok esetén lesz nulla a szorzat.

Tétel: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor a nullvektor, ha a vektorok párhuzamosak.

$$\text{Képletben: } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

Bizonyítás: Először azt bizonyítjuk, ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Ha a két vektor egymással párhuzamos, akkor a bezárt szög 0 vagy π , és így a $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, tehát $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Másodszor azt bizonyítjuk, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}$ szorzat akkor és csak akkor nulla, ha vagy $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, vagy egyik vektor nullvektor. Ha $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, akkor a bezárt szög $= 0$ vagy π . Ekkor a két vektor párhuzamos. A másik eset, hogy $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ legalább egyike nullvektor. Nullvektor iránya tetszőleges, így a párhuzamosság fennáll.

A skalárszorzattal ellentétben, a vektoriális szorzatot nem fogjuk általánosítani az általános vektorok körében, mivel nincsen praktikus alkalmazása.

4.3.4 Vegyes szorzat

Ahogy a fenti szorzatokat is, a gyakorlati alkalmazásokban gyakran használják az ún. vegyes szorzatot. Az elnevezést az indokolja, hogy mind a skalárszorzat, mind a vektoriális szorzat szerepel a definícióban.

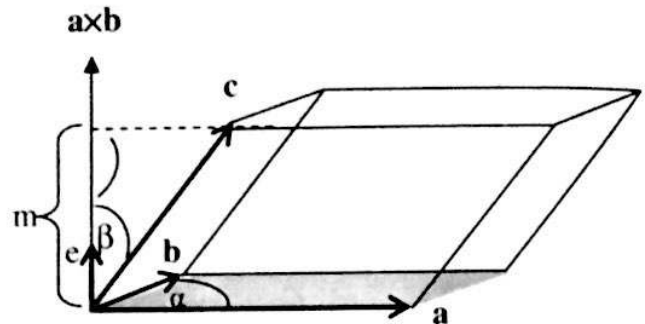
Definíció: Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ valós számot az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, vektorok vegyes szorzatának nevezzük.

Az eddigi definíciókat felhasználva: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha \cdot |\mathbf{c}| \cos \beta$, Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög α , az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által bezárt szög β .

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

A vegyes szorzat geometriai jelentése

Tekintsük az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedont (oldallapjai párhozamos paralelogrammák, a test a paralelogramma térbeli megfelelője). A paralelepipedon alapja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott paralelogramma (kék színnel). Az $\mathbf{e}$ vektor legyen $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel párhuzamos egységvektor, tehát merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok síkjára.



A $\mathbf{c}$ vektor végpontjából az $\mathbf{e}$ -re állított merőleges szakasz szagatott. A középiskolai tanulmányokból ismert, hogy a hasáb térfogata az alapterület szorozva a hasáb magasságával. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által meghatározott hasáb magassága a $\mathbf{c}$ vektornak az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorra eső merőleges vetülete, melyet m betű jelöl az ábrán.

Ezekkel a jelölésekkel:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{c} = (|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha) \cdot \underbrace{\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}}_{\substack{\text{c vektor } \mathbf{a} \times \mathbf{b}\text{-re eső} \\ \text{előjeles merőleges vetülete} = m}} = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \text{előjeles térfogat}$$

Az előjel attól függően + vagy -, hogy a $\mathbf{c}$ vektor ugyanabba a térfélbe mutat-e, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának geometriai jelentése a vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata.

4.4 Vektorok mátrixos (koordinátás) felírása

Az $\mathbf{e}$ fejezetben ismertetett tudnivalók nagy része a középiskolában tanult koordináta rendszer fogalmára is alapozható. A további lineáris algebrai tanulmányok miatt azonban fontos, hogy a koordináta fogalmát általánosan vezessük be. E bevezetéshez szükségesek az ún. felbontási tételek, melynek alapján a koordinátázás elvégezhető. A későbbi fejezetek megértését megkönnyíti, ha a vektorok általánosításához szükséges fogalmakat is már itt megtanuljuk. Ezek a fogalmak: bázis, lineáris függőség, lineáris függetlenség. A fejezet további részeiben a koordináta fogalmának felhasználásával végignézzük, miképpen számítható ki vektorok összege, számszorosa, skalárszorzata, vektoriális szorzata és vegyes szorzata.