

2. Lineáris (elsőfokú) egyenletrendszerek

2.1 Bevezetés

E fejezetben a lineáris algebra egy alapvető eszközét módszerét meg. Ez a lineáris egyenletrendszerek megoldására használatos Gauss elimináció (Gauss kiküszöbölés), és annak módosítása, a Gauss-Jordan elimináció. A gyakorlatban meglepően sok probléma fogalmazható meg a lineáris algebra nyelvén, és ezek sokszor éppen lineáris egyenletrendszerekre vezetnek.

Példák az alkalmazásokra:

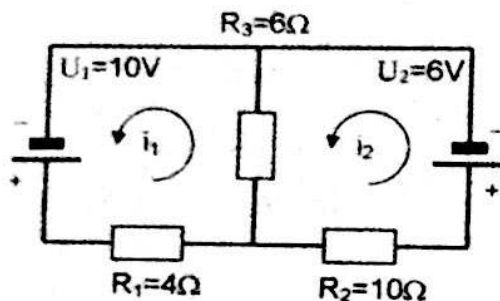
Az első alkalmazás Gauss csillagászati számítása volt. Ezen kívül álljon itt még néhány példa a sokból, hogy a gyakorlatban is találkozhatunk egyenletrendszerek megoldásával.

Kirchhoff törvényei alapján az elektromos áramköröket egyenletrendszerekkel lehet modellezni.

Csomóponti törvény: Egyenáramú köröknel bármely csomópontba befolyó áramerősségek algebrai összege zérus.

Huroktörvény: Az egyenáramú áramkörben bármely zárt huroknál a feszültségesések összege megegyezik a hurokban lévő telepek feszültségeinek (pontosabban elektromotoros erőknek) az összegével.

Az alábbi áramkörben i_1 és i_2 az egyes hurokokban folyó áramerősséget, U_1 és U_2 pedig az elektromotoros crüt jelenti.



Az egyes hurokoknak megfelelő egyenletek

$$\begin{aligned} 6(i_1 - i_2) - 10 + 4i_1 &= 0 \\ 10i_2 + 6 + 6(i_2 - i_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ebből:

$$\begin{aligned} 10i_1 - 6i_2 &= 10 \\ 6i_1 - 16i_2 &= 6 \end{aligned}$$

Ezek alapján $i_1 = 1 \text{ A}$, $i_2 = 0 \text{ A}$.

Közgazdasági modellek: Noha a valóságban a gazdaság rengeteg tényezőből tevődik össze, több száz ismeretlen mennyiség több száz egyenletben megfogalmazott kapcsolatairól van szó, mégis a lényeg megragadható ebben az alábbi, egyszerű probléma megfogalmazásban.

Tegyük fel, hogy a gazdaság a következő szektorokból áll: szolgáltatás, energia, nyersanyag előállítás. Egy év alatt azt figyelték meg, hogy

- 1 egységnyi szolgáltatáshoz 0.25 egységnyi saját terméket, 0.3 egységnyi energiát, és 0.3 egységnyi nyersanyagot használnak fel.
- 1 egységnyi energia előállításához 0.4 egységnyi szolgáltatás, 0.2 egységnyi energia és 0.5 egységnyi nyersanyag szükséges.
- 1 egységnyi nyersanyag előállítása pedig 0.35 egységnyi szolgáltatást, 0.5 egységnyi energiát, és 0.2 egységnyi (egyéb) nyersanyagot igényel.

Mennyit kell termelni az egyes szektorokban, hogy egyensúly legyen, vagyis, hogy minden szektor elegendő forrással rendelkezzen? Tételezzük fel, hogy a modell zárt: nincsen egyéb forrás és a rendszerből nem távozik el termék.

Megoldás:

Legyen s a szolgáltatások mennyisége, e az energiatermelés mennyisége, és n az előállított nyersanyagok mennyisége. Mivel a rendszer zárt, azért az egyensúlyt az alábbi lineáris egyenletrendszer írja le:

$$\begin{aligned} 0.25s + 0.3e + 0.3n &= s \\ 0.4s + 0.2e + 0.5n &= e \\ 0.35s + 0.5e + 0.2n &= n \end{aligned}$$

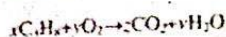
Soronként az egyes szektorokat írják le az egyenletek. Ha oszloponként értelmezzük, akkor pl. a szolgáltatások 25%-a vissza a szolgáltatásba, 40%-a az energia iparba, 35%-a a nyersanyag előállításba áramlik.

Ezen lineáris modell csak egyszerűsített változata a többfajta esetre aktualizálható teljes modellnek, amit alkotójáról **Leontief modellnek** neveztek el.

Kémiai egyenletek:

Amikor a propángáz (C_3H_8) elég, az oxigénnel (O_2) széndioxidot (CO_2) alkot és még víz (H_2O) is keletkezik.

A folyamatot leíró séma:



x, y, z, v jelentik az egyes anyagmennyiségeket. Hány egységnyi széndioxid és víz keletkezik ismert mennyiségű propán elégetésekor? Hány egységnyi oxigén használik el az égés során?

Megoldás:

(C, H, O) mennyiség arányokra:

$$\begin{aligned} 3x &= z & (\text{C atomokra}) \\ 8x &= 2v & (\text{H atomokra}) \\ 2y &= 2z + v & (\text{O atomokra}) \end{aligned}$$

Az egyenleteket nullára redukálva:

$$\begin{aligned} 3x - z &= 0 & (\text{C atomokra}) \\ 8x - 2v &= 0 & (\text{H atomokra}) \\ 2y - 2z - v &= 0 & (\text{O atomokra}) \end{aligned}$$

E fejezetben leírjuk és megmagyarázzuk magát a megoldási módszert. Az egyenletrendszer megoldásának létezésére, és a megoldások számára vonatkozó ismeretekre a vektorterek bevezetése után a 6.6 fejezetben még egyszer visszatérünk.

Definíció: A **lineáris egyenletrendszer** (nevének megfelelően) lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet **lineárisnak** nevezünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon szerepelnek.

A lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 10 \\ 11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 &= 15 \\ 16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 &= 20 \end{aligned}$$

Az x_i -vel jelölt mennyiségek az ismeretlenek. Az a_{ik} számokat együtthatóknak, a b_i számokat konstansoknak nevezük. Az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek száma és az egyenletek száma lehet különböző, de lehet egyenlő is.

Az **egyenletrendszer megoldásának** nevezük azokat az $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ szám n -eseket, amelyek elemeit az egyes egyenletekbe behelyettesítve azok jobb és bal oldala egyenlő.

Az, hogy hány ismeretlen és hány egyenlet van, nem mérvadó. Az alábbi egyenletrendszer négy egyenletből, három ismeretlenből áll, a melléte lévő pedig három ismeretlenből és három egyenletből. Ezen utóbbi nyilvánvalóan nem tartalmaz több információt, mint az előző, hiszen a 3. és a 4. egyenlet egymás számszorosa, ezért megoldásaik is ugyanazok:

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 6 \\ 4x + y - z &= 3 \\ 3x + 3y + 3z &= 18 \\ 3z &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 6 \\ 4x + y - z &= 3 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer alakját szemléltethetjük szemantikusan, ahogyan az egyenletrendszer melletti ábra mutatja. Ez a geometriai illusztráció segítségünkre lehet az elméleti részek megértéséhez. **Fontos a négyzet, amikor minden egyenletben minden ismeretlen szerepel:**

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 6 \\ 4x + y - z &= 3 \\ 3x + 3y + 3z &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2z &= 6 \\ 4x + y - z &= 3 \\ 3x + 3y + 3z &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \\ &= \end{aligned}$$

Téglalapot akkor rajzolunk, ha az egyenletek és az ismeretlenek száma nem egyenlő.

$4x - 2y + 2z = 6$	=	=	=
$4x + y - z = 3$			
$3x + 3y + 3z = 18$			
$x + y + z = 6$			

$4x - 2y + 2z + w = 6$	=
$4x + y - z - 3w = 3$	
$3x + 3y + 3z + 5w = 18$	

a.) eset

b.) eset

Ezek az egyenletrendszerek általában bonyolultnak tűnnek. Néhány esetben azonban a megoldás megkeresése egyszerű.

Példa:

$2z = -2$
$3y - 3z = 3$
$2x - y + z = 1$

$2z = -2$
$3y - 3z = 3$
$2x - y + z = 1$

	=	
--	---	--

	=	
--	---	--

Mire hasonlít ez az alak? Szembeszökő, hogy lépcsős alakú, ezért így is nevezzük: **lépcsős egyenletrendszer**. A megoldás szinte magától adódik: az 1. egyenletből $z = -1$. A z értékét a következő egyenletbe behelyettesítve kapjuk: $3y + 3 = 3$, amiből $y = 0$. A harmadik egyenletbe behelyettesítve a már kiszámított y és z értékeket, a $2x - 0 - 1 = 1$ egyenlethez jutunk, amiből $x = 1$. Az $x = 1, y = 0, z = -1$ számhármas az **egyenletrendszer egyetlen megoldása**. A lépcsős alak geometriai sémáját **háromszöggel jelöljük, ha ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen**.

A **Gauss eliminációnak** az a célja, hogy ekvivalens átalakításokkal lépcsős alakú egyenletrendszert hozzon létre. Ha ez sikerül, akkor az előbbi mintára a megoldás könnyen megkereshető. Noha matematikai szempontból a fenti lépcsős alak ugyanolyan módszerrel létrehozható, mint az alábbi, a megoldásnál ezen utóbbi, „fordított” lépcsős alakra törekszünk:

$2x - y + z = 3$
$3y - 3z = 3$
$2z = -2$

	=	
--	---	--

Ennek a „fordítottságnak” csupán az idők során kialakult szokás az oka. A későbbiekben az elsőnek mutatott lépcsős alak is szerephez jut majd.

A lépcsős alakban általában tehát az első egyenletben az első ismeretlen (és legtöbbször a többi is) szerepel, a másodikban a második ismeretlen szerepel, az első biztosan nem, a harmadik egyenletben a harmadik ismeretlen szerepel, az első és második pedig biztosan nem. Ezért a harmadik egyenletből a harmadik, a másodikból a második, az elsőből az első ismeretlen kiszámítható. Természetesen előfordulhat, hogy az első egyenletből is hiányzik valamelyik ismeretlen.

2.2 Példa Gauss eliminációra

Az alábbi példán megmutatjuk, miként vihető végbe a Gauss elimináció, hogyan tudjuk a második egyenletről az elsőnek felsorolt, a harmadik egyenletről a másodiknak felsorolt ismeretlen kiküszöbölni.

$$\begin{array}{rcl} 4x - 2y + 2z & = & 6 \\ 4x + y - z & = & 3 \\ 3x + 3y + 3z & = & 18 \end{array}$$

A megoldásban lényegében a Gauss elimináció lépéseit követjük. Első lépésként olyan első egyenletet szeretnénk, amiben az első ismeretlen együtthatója 1, ugyanis ennek segítségével könnyen tudjuk majd az x változót kiküszöbölni.

Mivel az utolsó egyenlet 3-mal osztva igen egyszerű alakot ölt, itt hozzuk létre ezt az együtthatót: $3x + 3y + 3z = 18 \rightarrow x + y + z = 6$. Ezt az egyenletet elsőnek írva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ 4x - 2y + 2z & = & 6 \\ 4x + y - z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z = 6 & \rightarrow & (-4x - 4y - 4z = -24) \\ 4x - 2y + 2z = 6 & & \\ 4x + y - z = 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & & -6y - 2z = -18 \\ & & 3y - 5z = -21 \end{array}$$

Az első egyenletben szereplő x ismeretlen együtthatója 1, ezért ennek segítségével ezt az x ismeretlent a többi egyenletről egyszerre kiküszöböljük úgy, hogy az első egyenlet -4 -szeresét hozzáadjuk a második és harmadik egyenlethez, ahogyan az a jobboldali keretben látható.

A megoldásokban a zárójelbe tettük azokat az egyenleteket, melyeket nem szokás leírni. A rövidített jelölést később megmutatjuk.

Ugyanezt a gondolatot az y ismeretlenre alkalmazva az új második egyenletet osztjuk (-2) -vel, és ezt hozzáadjuk a harmadik egyenlethez. Így az új harmadik egyenletről kiküszöböljük az y ismeretlent.

$$\begin{array}{rcl} -6y - 2z = -18 & / :2 \rightarrow & (3y + z = 9) \\ 3y - 5z = -21 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & & 4z = -12 \end{array}$$

Létrejött a lépcsős

alak:

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ & & 3y + z = 9 \\ & & & 4z = -12 \end{array}$$

Az utolsó egyenletről $z = 3$. Ezt behelyettesítve az utolsó előtti: $y = 2$. A már kiszámolt y és z értékeket behelyettesítve az első egyenletbe: $x = 1$. **Az egyetlen megoldás: (1,2,3).**

Azt az egyenletet, amelyiknek segítségével a többiből kiküszöböljük az egyik ismeretlent, nem szoktuk leírni. A fenti számoláshoz elegendő az alábbiakat rögzíteni. A kiküszöbölés során következő lépésében résztvevő egyenlet mellé írtuk, hogy melyik egyenlet (e) hányszorosát adjuk hozzá:

$$\begin{array}{rcl} 4x - 2y + 2z & = & 6 \\ 4x + y - z & = & 3 \\ 3x + 3y + 3z & = & 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ 4x - 2y + 2z & = & 6 \quad / +(-4) \cdot \text{I.e} \\ 4x + y - z & = & 3 \quad / +(-4) \cdot \text{I.e} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ -6y - 2z & = & -18 \\ -3y - 5z & = & -21 \quad / +(-1/2) \cdot 2 \cdot \text{II.e} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 6 \\ -6y - 2z & = & -18 \\ & & -4z = -12 \end{array}$$

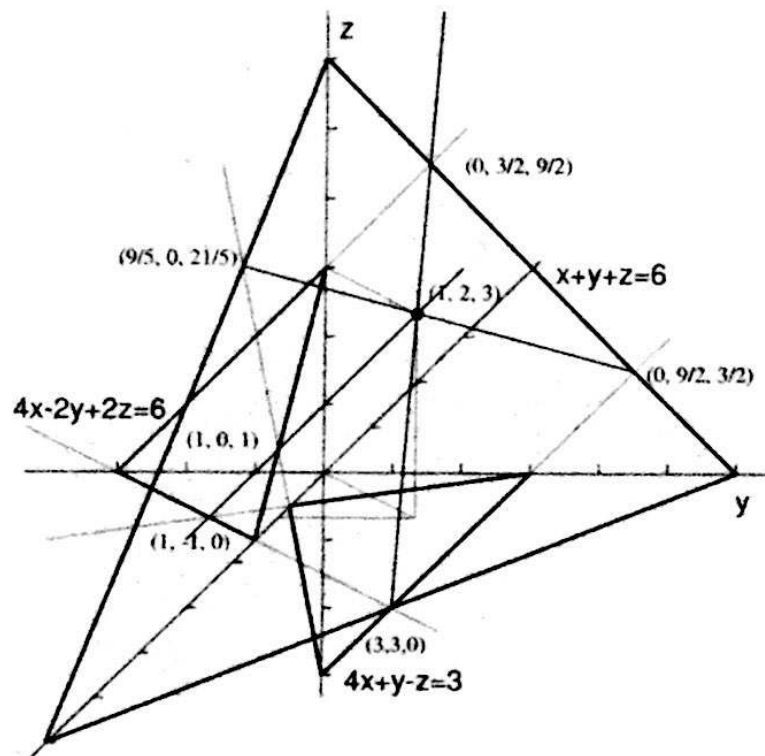
A 2.3 fejezetben ezt a leírási módot még tovább rövidítjük.

A három ismeretlenes **egyenletek szemléltetése** a térben lehetséges. A szokásos x, y koordinátatengelyekhez egy mindkettőre merőleges koordinátatengelyt képzelünk, ezen vehetők fel a z értékei. Ha valóban a térben ábrázolnánk az egyes lineáris egyenleteknek megfelelő pontokat, minden egyenletnek egy sík felelne meg (ezt a 4. fejezetben be is bizonyítjuk). Két sík vagy párhuzamos, vagy egy egyenesben metszi egymást. Ha párhuzamosak a síkok, akkor nincsen közös pontjuk, és ezért a kiindulási egyenleteknek sincsen megoldása, az egyenletrendszer ellentmondást

tartalmaz. Például, ha a fenti egyenletrendszerben a 3. egyenlet maradna $3x+3y+3z=18$, de a 4. egyenlet $x+y+z=6$ helyett $x+y+z=4$ lenne, akkor az egyenletrendszernek nem lenne megoldása, ezen két egyenlet képe két párhuzamos sík lenne.

Ha a síkok páronként nem párhuzamosak, és olyan egyenesekben metszik egymást, melyeknek van közös metszéspontja, ennek az egyetlen metszéspontnak a koordinátái adják a megoldást.

Az alábbi, perspektivikus ábrán az előző példában szereplő egyenleteknek megfelelő síkok láthatók. A megoldás az a pont, amelyik mindegyik síkon rajta van (az ábrán az $(1,2,3)$ pont).



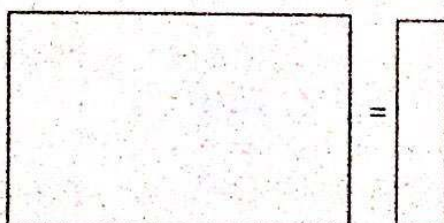
Lehet olyan eset is, hogy a páronkénti metsző egyenes minden pár esetén ugyanaz, ekkor végtelen sok megoldás van.

2.3 Gauss elimináció

A Gauss elimináció célja, hogy az adott egyenletrendszerből (alább balra) ekvivalens átalakításokkal egy lépcsős alakú egyenletrendszert, vagy röviden lépcsős alakot (alább jobbra) hozzunk létre:

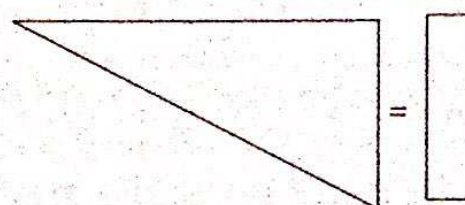
A kiindulási egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$



Ekvivalens átalakítás utáni lépcsős alak:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ \alpha_{33}x_3 + \dots + \alpha_{3n}x_n &= \beta_3 \\ &\dots \\ \alpha_{m'n}x_n &= \beta_{m'} \end{aligned}$$



Definíció: Az egyenletrendszer lépcsős alakjában az i . egyenlet tartalmazza az x_i ismeretlent, de nem tartalmazhatja az $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}$ ismeretleneket (lehetséges, hogy további ismeretleneket sem tartalmaz, de ezeket biztosan nem).

A lépcsős alakból az utolsó ismeretlen az utolsó egyenletből, majd visszafelé haladva, az egyes ismeretleneket az eggyel előbbi egyenletekből határozzuk meg.

Definíció: Ekvivalens az egyenletrendszer átalakítása, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása, mint az eredetinek.

Az ekvivalens elemi átalakítások a következők:

1. Két egyenlet felcserélése
2. Adott egyenlet szorzása egy nem nulla valós számmal
3. Az egyenletrendszer átalakítható úgy, hogy valamely egyenletének számszorosát hozzáadjuk valamely (más) egyenletéhez

Jóllehet elvben bármely két egyenlet mindig felcserélhető egymással, a felcserélés (1.) műveletét csak azokra az egyenletekre alkalmazhatjuk, amelyek még részt vesznek az eliminációban, máskülönben a már kiküszöbölt ismeretlenek „visszatérhetnek”.

Praktikus okokból az ismeretlenek sorrendjét rögzítettnek tekintjük, hiszen ekkor az egyenletben elfoglalt helyük alapján is azonosítani tudjuk őket. Ez a későbbiekben a mátrixos felírásban lesz hasznos.

A lépcsős alakot többféleképpen is létre lehet hozni. Gauss módszere azonban rögzített lépéseket tartalmaz. Ezeket a lépéseket egy algoritmus felépítésével szeretnénk általánosan leírni. Tehát a fejezet további részében nemcsak a rögzített lépéseket, hanem egy olyan algoritmust is kidolgozunk, amelynek alapján a lineáris egyenletrendszert megoldó számítógépes programok is működnek (azonban ehhez még más, numerikus számítási fogásokat is alkalmazni kell, hogy a számítási hibákat a lehető legkisebbre csökkentsük. Ezeket a Numerikus módszerek című tárgy tartalmazza).

Mielőtt a módszert ismertetnénk, a lépcsős alak létrehozásának szabályai közül az első két lépést részletesen átgondoljuk.

A Gauss elimináció első két lépése a lépcsős alak létrehozásában:

1. lépés: megvizsgáljuk, hogy az első egyenletben az első ismeretlen együtthatója nem nulla-e. Ha nulla, akkor az egyenletek cseréjével elérjük, hogy ne nulla legyen. A cseré utáni helyzet a mérvadó, úgy tekintjük, hogy ez az adott egyenletrendszer.
2. lépés: az első ismeretlent (az első egyenlet kivételével) kiküszöböljük az összes többi egyenletből úgy, hogy az első egyenlet $(-a_{i1}/a_{11})$ -szeresét hozzáadjuk az i . egyenlethez.

Magyarázat: Az 1. lépés biztosítja, hogy $a_{11} \neq 0$. A 2. lépést bontsuk három részre:

- a.) először képzeljük el, hogy az (esetleges egyenletcsere utáni új) első sort $1/a_{11}$ -gyel szorozzuk (vagyis $a_{11} \neq 0$ -val osztunk). Ekkor x_1 együtthatója 1 lesz.
- b.) Ha most az első egyenletet megszorozzuk a_i -vel, akkor az első egyenletben x_1 együtthatója pontosan egyenlő lesz az i . egyenletben szereplő x_1 együtthatójával:
 $(a_{i1}/a_{11}) \cdot a_{11} = a_{i1}$
- c.) ennek (-1) -szeresét hozzáadva az i . egyenlethez az x_1 együtthatója valóban 0, vagyis ezzel x_1 -t kiküszöböltük az i . egyenletből

a.)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i) \quad / : a_{11} \\ \dots \end{array}$$



b.)

$$\begin{array}{l} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{1}{a_{11}}b_1 \right) \\ \dots \\ ((a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i)) \quad / -a_{i1} \cdot 1.e \end{array}$$



c.)

$$\begin{array}{l} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{1}{a_{11}}b_1 \right) \\ \dots \\ 0 + x_1 + \left(a_{i2} - a_{i1} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{i3} - a_{i1} \frac{a_{13}}{a_{11}} \right) x_3 + \dots + \left(a_{in} - a_{i1} \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right) x_n = b_i - a_{i1} \frac{1}{a_{11}}b_1 \end{array}$$

A zárójelbe tett egyenleteket azonban nem írjuk le, helyettük marad az eredeti I. és i . egyenlet a megoldás leírásakor. A további lépésekben ezt ismételjük úgy, hogy az i . lépésben az a_{11} szerepét a_{ii} játssza, és az a_{ii} alatti elemeket nullázzuk a_{ii} segítségével.

A részletes algoritmus a következő.

Algoritmus: Lépcsős alak kialakítása Gauss eliminációval:

G1. lépés: Legyen $i=1$.

G2. lépés: Vizsgáljuk meg: $a_{ii}=0$? Ha igen, az egyenletek cseréjével érjük el, hogy $a_{ii} \neq 0$. Ha nem, rátérünk a 3. lépésre.

G3. lépés: az i . ismeretlent kiküszöböljük a k . ($k= i+1, i+2, \dots, m$) egyenletből úgy, hogy az i . egyenlet $(-a_{ki}/a_{ii})$ - szeresét hozzáadjuk a k . egyenlethez.

- Ha ezáltal a k . egyenlet többi együtthatója is, és konstans tagja is nulla, az egyenletet elhagyjuk.
- Ha ezáltal a k . egyenlet együtthatói nullák, de a konstans tag nem, akkor nyilván nem lehet olyan számokat találni, amiket behelyettesítve a bal és jobb oldal egyenlő. Ez az egyenlet ellentmondást tartalmaz. **Az ilyen egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért röviden „tilos” egyenletnek nevezzük.** Ekkor az eljárás befejeződött, az egyenletrendszernek nincsen megoldása.
- Ha a fenti két eset nem fordul elő, és még van $i+1$. egyenlet, akkor növeljük meg i értékét eggyel, és ezzel az új i -vel végezzük el rendre a G2., G3. lépéseket. Ha nincsen már több egyenlet, akkor az eljárás véget ért, a lépcsős alak létrejött.

Magyarázat: Fontos a fenti eljárásban, hogy az első egyenlet nem változik. Az első ismeretlen kiküszöbölése a többi egyenletből azt jelenti, hogy azokban az első ismeretlen együtthatója nulla. A további lépésekben ezek a nulla együtthatók már nem rontódnak el, hiszen ezen nullák számszorosa is nulla, így nullákat adunk az eliminációban még részt vevő egyenletekhez. Az $i=2$ lépés után a második egyenlet nem változik, s a második ismeretlen kiküszöbölésekor kapott nulla együtthatók a további lépésekben nem változnak, fent említett ok miatt, és így tovább.

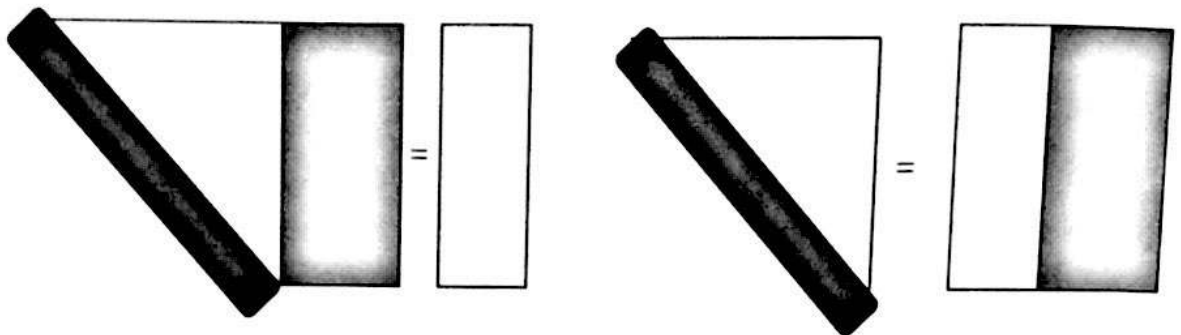
Ha csupa nulla sor keletkezett, akkor az adott egyenlet a többi egyenlet számszorosainak összegével adódott, vagyis nem ad új információt az ismeretlenek közötti kapcsolatáról. A csupa nulla együtthatójú egyenletekben az ismeretlenek bármely értékkel való helyettesítésére igaz egyenletet kapunk. Ez az egyenlet nem járul hozzá a megoldás megkereséséhez, **ezért a csupa nulla együtthatójú egyenlet elhagyható.**

Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss eliminációval

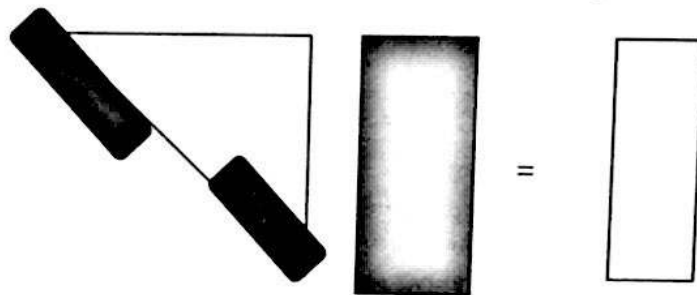
A lépcsős alakot kialakítjuk a fent leírtak szerint. Ha nem találtunk ellentmondást tartalmazó egyenletet, akkor van megoldás, és a megoldásokat a lépcsős alak vizsgálatával találjuk meg:

- Amennyiben a lépcsős alakban (és nem az eredeti egyenletrendszerben) szereplő egyenletek száma egyenlő az ismeretlenek számával, m -mel, akkor az m . egyenletből x_m , az $m-1$. egyenletből az x_m behelyettesítése után x_{m-1} , és így tovább folytatva, az 1. egyenletből a már kiszámolt $x_m, x_{m-1}, \dots, x_3, x_2$ behelyettesítésével x_1 kiszámítható.
- Ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint ahány egyenlet a lépcsős alakban létrejött, akkor végtelen sok megoldás van. A megoldásokat paraméteres alakban adjuk meg. Valahány ismeretlen szabadon választható, ezek a paraméterek. A többi ismeretlent ezekkel a paraméterekkel adjuk meg.

Ha az a_{ii} nulla lett volna, és ezért más egyenletre cseréltük, akkor belátható, hogy a főátlóbeli (i . egyenlet, i . ismeretlen, $i \leq n$, egy négyzet forma átlója) ismeretlenek könnyen kifejezhetők a sorban szereplő további ismeretlenekkel. Ezért a **főátlóbeli ismeretleneket nem választjuk szabadon:**



Ha az a_{ii} nulla lett volna, de nem tudtuk más egyenletre cserélni, akkor mert már alatta is nullák szerepeltek, akkor a következőképpen lehet eljárni. Abban az egyenletben, amelyikben az első nem nulla ismeretlen az x_i , meghatározzuk az x_i pozícióját. A pozíció meghatározásához be kell számítani a nulla együtthatóval szereplő (általában le sem írt ismeretlenek) együtthatóit. Ha ez a pozíció az i -dik, akkor ez az ismeretlen nem választható szabadon. A szabadon választható ismeretlenek rögzítése után, ezekkel a változókkal az utolsó egyenlethől kiindulva, visszafelé haladva kifejezzük a nem szabadon választhatókat. Az így kapott paraméteres kifejezések adják az egyenletrendszer megoldásait



Egy végtelen sok megoldással rendelkező egyenletrendszer általában többféleképpen is parameterezhető, nemcsak a fent leírt módon, de az itt javasolt módszer mindig célravezető.

Az 1. esetre már adtunk példát a 2.2. fejezetben.

Feladat: Oldja meg úgy a 2.2 fejezet példáját, hogy szigorúan követi a fent leírt algoritmust!

A 2. esetet illusztrálja a következő példa.

Példa: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
2. $6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10$
3. $11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15$
4. $16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20$

Az egyenleteket sorszámmal láttuk el. Itt nem a rövidebb leírással adjuk meg a megoldást, mivel célunk az algoritmus lépéseinek illusztrálása.

$i=1$

G1. lépés: 1. egyenletben x_1 együtthatója nem nulla.

G2. lépés:

1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
2. $6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10 \quad /+ \quad (-6) \cdot 1. \text{ egyenlet}$

3. $11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15 / (-11) \cdot 1$. egyenlet
4. $16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20 / (-16) \cdot 1$. egyenlet

Eredmény:

1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
2. $0 - 5x_2 - 10x_3 - 15x_4 = -20$
3. $0 - 10x_2 - 20x_3 - 30x_4 = -40$
4. $0 - 15x_2 - 30x_3 - 45x_4 = -60$

i=2: G1. lépés: 2. egyenletben x_2 együtthatója nem nulla.

G2. lépés:

1. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
2. $0 - 5x_2 - 10x_3 - 15x_4 = -20 / (-5) \rightarrow x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$
3. $0 - 10x_2 - 20x_3 - 30x_4 = -40 / +10 \cdot 2$. (új) egyenlet $0 + 0 + 0 = 0$
4. $0 - 15x_2 - 30x_3 - 45x_4 = -60 / +15 \cdot 2$. (új) egyenlet $0 + 0 + 0 = 0$

Ezzel a lépcsős alak kialakítása véget ért, hiszen nincsen több egyenletünk, a csupa 0 egyenleteket töröltük:

E négyzet főátlójának elemei
nem választhatók szabadon



$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{array}$$

Az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretleneké. Az x_1 ismeretlen pozíciója az 1. egyenletben 1, ezért az x_1 nem választható szabadon. Az x_2 ismeretlen pozíciója a 2. egyenletben 2, ezért x_2 sem választható szabadon (a négyzet formát jelöltük, ennek átlójában vannak a szóbanforgó elemek). Több egyenlet nincsen, ezért x_3 és x_4 szabadon választható. Ezekkel a paraméterekkel a többi ismeretlen kifejezhető. A lépcsős alak miatt az utolsó egyenlettel kezdjük:

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \rightarrow x_2 = 4 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \rightarrow x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 5 - 2(4 - 2x_3 - 3x_4) - 3x_3 - 4x_4 = \\ &= 5 - 8 + 4x_3 + 6x_4 - 3x_3 - 4x_4 = -3 + x_3 + 2x_4 \end{aligned}$$

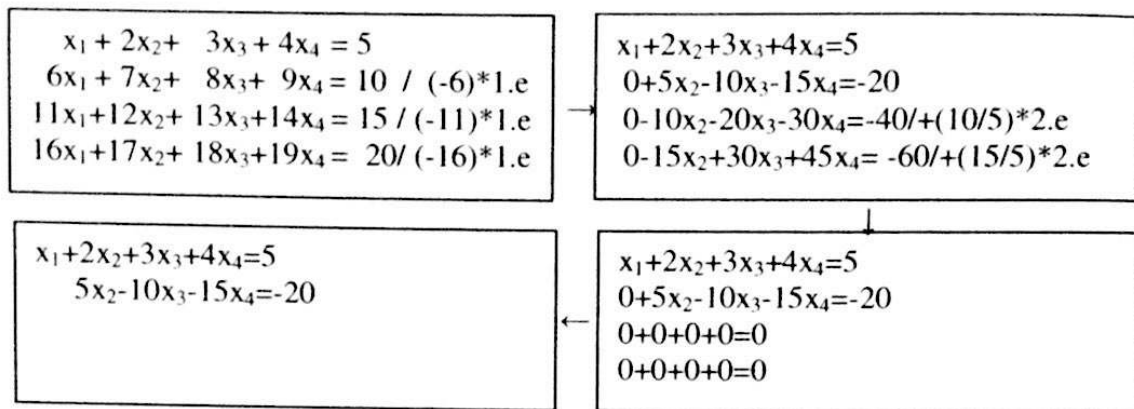
Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + p + 2q \\ x_2 &= 4 - 2p - 3q \\ x_3 &= p, \quad p \in \mathbb{R} \\ x_4 &= q, \quad q \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Az általános megoldást úgy kell megadni, hogy látható legyen, mely ismeretlenek választhatók szabadon. A főátlóban x_1 és x_2 áll, tehát ezeket tudjuk a többi ismeretlennel kifejezni. Az általános megoldásban láthatjuk a szokásos felírást, a p és q valós paraméterek bevezetésével.

A két összefüggésnek eleget tevő x_1, x_2, x_3, x_4 számnégyesek az egyenletrendszer megoldásai. Az **általános megoldást** ennél tömörebben nem lehet leírni. Végtelen sok ilyen számnégyes van, hiszen az x_3 és x_4 változók tetszőleges valós számok. Az x_1 és az x_2 azonban nem tetszőlegesek, ezeket az előbbiekből ki kell számolni, ha szükséges. (Egy megoldás a **végtelen** sokból: legyen pl. $x_3=1, x_4=0$. Ekkor a többi ismeretlen: $x_1=-2, x_2=2$. A számnégyes: $x_3=1, x_4=0, x_1=-2, x_2=2$. Ez a négy szám tehát az egyenletrendszer **egy** megoldása, az egyenleteknek eleget tesz, de nem az **általános** megoldás.)

A lépcsős alak kialakítását rövidebben így lehetett volna leírni:



2.4 Gauss elimináció és algoritmus az egyenletrendszerek egy mátrixos alakjával

Számok táblázatos elrendezését mátrixnak is nevezik. A sorokat, oszlopokat szögletes, vagy gömbölyű zárójelbe téve jelezzük, hogy ezt a táblázatot mátrixnak értelmezzük. Az egyenletrendszerek sokféleképpen írhatók le mátrixok segítségével. A többi leírást, és a mátrixokkal kapcsolatos tudnivalókat a mátrixalgebráról szóló 3. fejezetben ismertetjük.

Az a_{ik} számokból, vagyis az x_i ismeretlenek együttthatóiból alkotott táblázatos elrendezést a lineáris egyenletrendszer **együttható mátrixának** nevezzük. Az együttható mátrix utolsó oszlopa után egy oszlopba beírva a b_i konstansokat, kapjuk a lineáris egyenletrendszer **kibővített mátrixát**.

A lineáris egyenletrendszer általános alakja:

Az általános alakhoz tartozó együttható mátrix:

Az általános alakhoz tartozó kibővített mátrix:

$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \dots a_{3n}x_n &= b_3 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$
---	---	---

Nézzük meg újra a fenti példák megoldásait abból a szempontból, hogy a leírásban az ismeretlenekkel mi történik? Láthatjuk, hogy az ismeretleneket képviselő szimbólumokat mindig csak lemásoltuk, együtthatóik változtak csak. Ez a tény lehetőséget ad egy tömörebb leírásra. Ha az ismeretlenek pozícióját rögzítjük, akkor felesleges ezeket az ismeretleneket lépésenként leírni, elegendő a kibővített mátrixon végrehajtani az egyenletekkel elvégzett műveleteket, így sokkal kevesebbet kell írunk. Igaz, figyelmesen kell eljárunk.

Nézzük meg az egyik példán a lépcsős alak kialakításának, majd az ennek megfelelő egyenletrendszer felírásának menetét a mátrixos alak segítségével (a nyilak mutatják az egymás utáni lépéseket):

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\begin{array}{l} 4x - 2y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{array}} \xrightarrow{\text{kibővített}} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{mátrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+(-4)* \\ \text{1. sor}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & -3 & -4 & -21 \end{bmatrix} \\
 \downarrow \\
 \boxed{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -6y - 2z = -18 \\ -4z = -12 \end{array}} \xleftarrow{\text{a lépcsős alaknak}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \xleftarrow{\text{megfelelő egyenletrendszer}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

A megoldás menete innen az eredeti megoldással megegyezik. Így sokkal rövidebb a megoldás leírása! A lépcsős alak egyenletrendszerre alakítása előtt még egy lépést elvégezhetünk a lépcsős alakban, s utána írjuk át a megfelelő egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{l}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{+(-6) \\ +(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{a lépcsős alaknak}} \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y + (1/3)z = 3 \\ z = 3 \end{array} \\
 \text{megfelelő egyenletrendszer}
 \end{array}$$

A Gauss eliminációt ebben a tömör, mátrixos alakban írjuk le a továbbiakban.

Gauss elimináció az egyenletek egy mátrixos alakjában

Lényege, hogy az egyenletrendszerhez tartozó kibővített mátrix segítségével írjuk le az egyenletrendszer ekvivalens átalakításait.

A cél, hogy a **kibővített mátrix bal alsó háromszögben csupa nulla elem szerepeljen, ezt a mátrix lépcsős alakjának nevezzük**. Másképpen fogalmazva, a lépcsős alakú mátrixban az a_{ii} elemek alatt csak nulla számok szerepelnek. Az a_{ii} elemeket a **mátrix főátlójának** nevezzük. A lépcsős alakban a főátló alatti elemek nullák. A lépcsős alak létrehozása után felírjuk az annak megfelelő egyenletrendszert, és a megoldás(oka)t a már ismertetett módon kapjuk.

Példa lépcsős alakú mátrixra:

E mátrix főátlójában álló elemek: 1, -6, 4.

A főátló alatti elemek nullák.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

E rövidített leírásban az eddigiekhez képest a különbség csak a lépcsős alak létrehozásában van, ezért csak ennek leírását fogalmazzuk újra. Ehhez szükség van az egyenletrendszer ekvivalens átalakításainak megfelelő mátrix átalakításának szabályaira.

Elemi ekvivalens sorműveletek az egyenletrendszer kibővített mátrixára:

1. A sorok felcserélhetők (egyenletek felcserélhetők).
2. Sor szorozható egy nem nulla valós számmal (egyenlet átalakítható úgy, hogy szorozzuk egy nem nulla valós számmal).
3. Sor valós számszorosa hozzáadható (másik) sorhoz (az egyenletrendszer átalakítható úgy, hogy valamely egyenletének számszorosát hozzáadjuk valamely egyenletéhez).

Noha a sorok felcserélhetők, ezt a 1. műveletet csak azokra a sorokra alkalmazhatjuk, amelyek még részt vesznek az eliminációban, máskülönben a már kiküszöbölt ismeretlenek „visszatérhetnek”.

Lépcsős alak kialakítása Gauss eliminációval mátrixos alakban:

G1 lépés: Legyen $i=1$.

G2. lépés: Vizsgáljuk meg: $a_{ii}=0$? Ha igen, sorcserével elérjük, hogy $a_{ii} \neq 0$. Ha már a_{ii} nem nulla, akkor az i . sort megszorozzuk $1/a_{ii}$ -vel (ezzel $a_{ii}=1$). Rátérünk a 3. lépésre.

G3. lépés: az a_{ii} alatti a_{ik} ($k=i+1, i+2, \dots, m$) elemek helyén nullákat hozunk létre a sorokban úgy, hogy az i . sor $(-a_{ik})$ -szeresét hozzáadjuk a k . sorhoz.

- a. Ha ezáltal a k . sor nulla, a sort elhagyjuk.
- b. Ha ezáltal a k . sor az utolsó elem kivételével nulla, akkor az egyenletrendszernek nincsen megoldása. Az ilyen sorokat szokás **tilos sornak** nevezni.
- c. Ha a fenti két eset nem fordul elő, és még van $i+1$. sor, akkor növeljük meg i értékét eggyel, és ezzel az új i -vel végezzük el rendre a G2., G3. lépéseket. Ha nincsen már több sor, akkor az eljárás véget ért, a lépcsős alak létrejött.

Másképpen és rövidebben a következőképpen is megjegyezhetjük a Gauss elimináció lényegét:

A k . lépésben $a_{kk}=1$ -et hozunk létre, majd ennek segítségével a megengedett elemi sorműveletek alkalmazásával „kinullázzuk” az a_{kk} alatti elemeket.

A fenti leírás annyiban újat ad az egyenletrendszereknél megfogalmazott megoldási módszerhez képest, hogy a lépcsős alakban a főátlókban egységeket hoz létre. Az egyenletrendszereknél ezt nem hangsúlyoztuk, hiszen ott a már kialakult lépcsős alak után a megoldásban evidens, hogy az ismeretlenek kiszámításához ezt az osztást el kell végezni.

Példa olyan egyenletrendszerre melynek nincsen megoldása

$$\begin{array}{l}
 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 2 \\
 0.5x_1 + 1.5x_2 + 3.5x_3 + x_4 = 1 \\
 x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 8
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{ccccc}
 2 & -4 & 2 & -8 & 2 \\
 0.5 & 1.5 & 3.5 & 1 & 1 \\
 1 & -12 & -11 & -16 & 8
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 /: 2 \\
 /*2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\
 0 & -10 & -12 & -12 & 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\
 0 & -12 & -11 & -16 & 8
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 /(-1)*\text{I.sor} \\
 /(-1)*\text{I.sor}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\
 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 9
 \end{array}$$

A mátrix utolsó sora **tilos sor**, mert a megfelelő egyenlet:
 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 9$, vagyis
 $0 = 9$ lenne!

A tilos sornak megfelelő egyenlet ellentmondást tartalmaz. Mivel az egyenletrendszer minden egyenletének eleget tévő szám n -eseket keresünk, ha egy egyenlethez ilyen nem létezik, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-Jordan eliminációval

Gauss-Jordan eliminációnak nevezzük azt a megoldási módszert, amelynek kiindulási egyenletrendszerén először elvégezzük a Gauss eliminációt. Az egyszerűség kedvéért egyelőre tegyük fel, hogy a Gauss eliminációval kapott lépcsős alakban ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen. Ezen a lépcsős egyenletrendszeren elvégezzük lényegében még egyszer az ismeretlenek kiküszöbölését, de most a kiküszöbölést az utolsó egyenlettel kezdjük, és az utolsónak felsorolt ismeretlent küszöböljük ki a felette lévő egyenletekből, majd az utolsó előtti egyenlet segítségével az utolsó előttinek felsorolt ismeretlent küszöböljük ki a felette lévő egyenletekből, és így tovább. Az így kapott alakot **redukált lépcsős alak**nak nevezzük. A kiküszöbölés során itt is csak az előző fejezetben megadott elemi sorműveletek alkalmazhatók.

A mátrixos alakkal mutatjuk meg a módszer lényegét. A lépcsős alak kialakítását ismét leírjuk, majd a 2.2 példa megoldását folytatjuk a Gauss-Jordan eliminációval:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\begin{array}{l} 4x - 2y + 2z = 6 \\ 4x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 18 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{kibővített} \\ t \rightarrow \\ \text{mátrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 18 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{/:3 \text{ és} \\ \text{sorcsere}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} /+(-4)*1.\text{sor} \\ /+(-4)*1.\text{sor} \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{array} \right] \begin{array}{l} /:(-6) \rightarrow \text{GAUSS E.} \\ \leftarrow /:(-4) \end{array} \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{VÉGE} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow /:(-4) \\ \leftarrow /:(-1/2)*2.\text{sor} \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow /:(-1)*2.\text{sor} \\ \downarrow \end{array} \\ \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array} \\ \\ \boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{A redukált lépcsős} \\ \text{alaknak} \\ \leftarrow \\ \text{megfelelő} \\ \text{egyenletrendszer} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{array}
 \end{array}$$

Amint látható, a redukált lépcsős alakból a megoldás azonnal adódik.

Példa végtelen sok megoldással rendelkező egyenletrendszerre:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 10 \\11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 &= 15 \\16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 &= 20\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 0 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ /+ (-6)*1.\text{sor} \\ /+ (-11)*1.\text{sor} \\ /+ (-16)*1.\text{sor} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] /:(-5) \leftarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & -40 & 0 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & -60 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ /+ (-10/5)*2.\text{sor} \\ /+ (-15/5)*2.\text{sor} \end{array}$$

$$\downarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right] /+ (-2)*2.\text{sor} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

$$\downarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right] /+ (-2)*2.\text{sor} \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

E négyzet főátlójának elemeihez tartozók nem választhatók szabadon

A redukált lépcsős alaknak megfelelő egyenletrendszer:

A redukált lépcsős alak

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 - 2x_4 &= -3 \\x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4\end{aligned}$$

Általános megoldás:

$$\begin{aligned}x_1 &= -3 + p + 2q \\x_2 &= 4 - 2p - 3q \\x_3 &= p, \quad p \in \mathbb{R} \\x_4 &= q, \quad q \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

A *-gal jelölt utolsó lépés mutatja, hogy azokat az ismeretleneket nem választhatjuk szabadon, amelyek első nem nulla együtthatója 1, és ez abban a sorszámú sorban szerepel, ahányadik ismeretlenről van szó. Ha az eljárás során nem esik ki főátlóbeli elem, akkor a főátlónak megfelelő ismeretleneket tudjuk a többivel kifejezni. A példában tehát x_3 és x_4 szabadon választható.

Redukált lépcsős alak kialakítása eliminációval

Az **egyenletrendszer redukált lépcsős alakjában** n db egyenlet van. Ha $k < n$, akkor a k . egyenletben az $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ ismeretlenek együtthatói nullák. Az n . egyenletben $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}$ ismeretlenek együtthatói nullák. Ha az ismeretlenek száma $i > n$, akkor a többi ismeretlen együtthatója nem feltétlenül nulla.

A **kibővített mátrix redukált lépcsős alakjában**, ha a sorok száma n , és az oszlopok száma m , akkor $n=m$ esetén a mátrix főátlójában egyesek állnak, alatta és felette pedig nullák. Különböző sor és oszlop szám esetén az eredeti k . egyenlet k . pozíciójában egyes, alatta és felette nullák állnak.

Kiindulási mátrix: a Gauss eliminációnál leírtak szerint kiszámított lépcsős alakú mátrix.

GJ 1. lépés: i = a lépcsős mátrix sorainak száma. Ha $a_{ii} = 0$, akkor sorcseréssel megoldjuk, hogy ne nulla legyen. Ha nem lehet, akkor csökkentjük i -t eggyel, és újra megnézzük. Tegyük fel most hogy $a_{ii} \neq 0$.

GJ 2. lépés: az a_{ii} elemet $1/a_{ii}$ -gyel való szorzással 1-re alakítjuk. Ezeket az egyeseket szokás **vezéregyeseknek** is nevezni.

GJ 3. lépés: az a_{ki} feletti a_{ki} ($k = i-1, i-2, \dots, 1$) elemek helyén nullákat hozunk létre a sorokban úgy, hogy az i . sor $(-a_{ki}/a_{ii})$ -szeresét hozzáadjuk a k . sorhoz.

GJ 4. lépés: Ha még van $i-1$. sor, akkor csökkentjük i értékét eggyel, és ezzel az új i -vel végezzük el rendre a G2., G3., G4. lépéseket. Ha nincsen már több sor, akkor az eljárás véget ért, a redukált lépcsős alak létrejött.

Másképpen és rövidebben a következőképpen is megjegyezhetjük a Gauss-Jordan elimináció lényegét:

A k . lépésben a_{kk} segítségével a megengedett elemi sorműveletek alkalmazásával „kinullázzuk” az a_{kk} alatti elemeket, majd az így kapott lépcsős alakban a lehető legnagyobb k értékével kezdve a_{kk} segítségével a megengedett elemi sorműveletek alkalmazásával először a k . sort a_{kk} -osztjuk, az új a_{kk} így 1 lesz. Ennek segítségével „kinullázzuk” az a_{kk} feletti elemeket. Ezt ismételjük eggyel csökkenő k értékekre, amíg $k=1$ nem lesz.

A megoldás a Gauss-Jordan eliminációval:

A redukált lépcsős alakot kialakítjuk a fent leírtak szerint. Ha nem találtunk ellentmondást tartalmazó egyenletet, akkor van megoldás, és a megoldásokat a lépcsős alak vizsgálatával találjuk meg:

1. Amennyiben a **redukált lépcsős alakban** a sorok száma (nem az eredeti egyenletrendszerben) egyenlő az ismeretlenek számával, akkor az ennek megfelelő egyenletrendszer azonnal a megoldást szolgáltatja.
2. Ha az ismeretlenek száma nagyobb, mint ahány sor a **redukált a lépcsős alakban** létrejött, akkor végtelen sok megoldás van. Valahány ismeretlen szabadon választható, ezek a paraméterek. A többi ismeretlent ezekkel a paraméterekkel adjuk meg. Az, hogy mely ismeretlen választható szabadon, például a következőképpen dönthető el: ha az i . sorban az első nem nulla elem az x_i -ismeretlenhez tartozik, akkor ez az ismeretlen nem választható szabadon. A megoldást úgy kapjuk, hogy a redukált lépcsős alaknak megfelelő egyenletrendszerben a szabadon választható ismeretlenek megkeresése után, ezekkel az ismeretlenekkel kifejezzük a nem szabadon választhatókat. Az így kapott paraméteres kifejezések adják az egyenletrendszer megoldásait (ld. az egyenletrendszernél leírtakat).

Egy végtelen sok megoldással rendelkező egyenletrendszer általában többféleképpen is paraméterezhető, nemcsak a fent leírt módon, de az itt javasolt módszer mindig célravezető.