

1. Az alábbi egyműveletes struktúrák közül melyek alkotnak félcsoporthot, melyek csoportot:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| a, $(\mathbb{R}, +)$ | b, $(\mathbb{R}, *)$ | c, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ |
| d, $(\mathbb{Z}, +)$ | e, $(\mathbb{Z}, *)$ | |
| f, $(\mathbb{N}, +)$ | g, (Páros egészek, +) | h, (Páratlan egészek, *) |
| i, $(2^{\mathbb{H}}, \text{metszet})$ | j, $(2^{\mathbb{H}}, \text{unió})$ | |
| k, $(\mathbb{R}^n, +)$ | l, $(\mathbb{R}^n, \text{vektoriális szorzat})$ | m, $(\mathbb{R}^n, \text{skalárszorzat})$ |
| n, $(\mathbb{R}^{n \times m}, +)$ | o, $(\mathbb{R}^{n \times n}, *)$ | |

2. Lali elsőéves a PPKE ITK-n ☺, és szeptember végén végre hazautazik.

Szülei, míg távol volt, elkezdték kipakolni a padlást, úgyhogy Lalit is sok, a gyerekkorából származó doboz fogadja a szobájában. Az egyik dolog, amit megtalál egy régi játék, még öccsével hajtogatták kartonpapírból: két ugyanolyan négyoldalú (tetraéder alakú) dobókocka. A négy-négy oldalra 1, 2, 3 és * van felrajzolva. Alatta ott hever egy azóta megsárgult lapon a használati utasítás - mindkét kockával kell dobni, az eredményt pedig így kell „számítani” (&-jellel jelöljük, hogy ezt a két számot dobtuk a kockával):

- Két különböző szám dobása esetén a harmadik szám az eredmény (pl. $1 \& 3 = 2$, $1 \& 2 = 3$)
- Egy szám és a csillag dobása esetén a szám (pl. $2 \& * = 2$)
- Két azonos szám esetén a csillag (pl. $3 \& 3 = *$)

A szabályok olvasása közben Lali elmosolyodik és gyorsan átsiet öccséhez elűjságotni, hogy szerinte egy Abel-csoportot sikerült megcsinálniuk 8 évesen. Az öcskös – lévén még csak 11. osztályos – értetlenül néz. Mit mondjon Lali, hogy megismertesse (egyébként felettébb értelmes) öccsét a csoport fogalmával és bizonyítsa állítását?

3. Az alábbi kétműveletes struktúrák közül melyek alkotnak gyűrűt, melyek ferdetestet, melyek testet?

- | | |
|--------------------------------------|---|
| a, $(\mathbb{R}, +, *)$ | b, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, *)$ |
| c, $(\mathbb{Q}, +, *)$ | d, $(\mathbb{Z}, +, *)$ |
| e, $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, *)$ | |

f) alaphalmaz: pozitív valós számok

$$a+b=a*b \quad a*b=b^{\lg(a)} \quad (\text{Test})$$

g) alaphalmaz: valós számok

$$a+b=\sqrt[5]{a^5+b^5} \quad a*b=5ab \quad (\text{Test})$$

h) alaphalmaz: H hatványhalmaza

$$A+B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad A*B=A \text{ metszet } B \quad (\text{Komm., egységelemes gyűrű})$$