

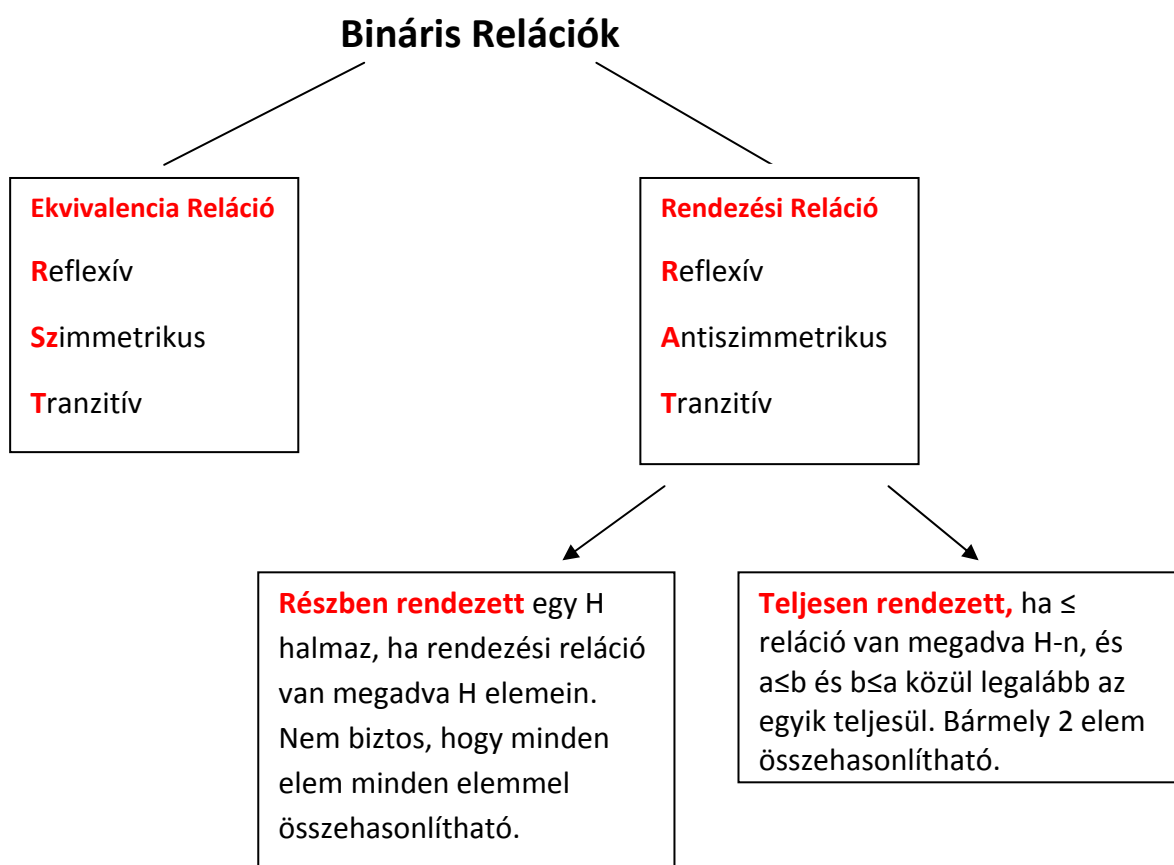
Relációk

Elmélet:

Def.: Az R lineáris reláció, ha $R \subseteq A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Bináris relációk lehetséges tulajdonságai:

1. Reflexív, ha $(a, a) \in R$
- 2.(a) Szimmetrikus, ha $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
- 2.(b) Antiszimmetrikus, ha $(a, b) \in R \text{ és } (b, a) \in R \Leftrightarrow a = b$
3. Transitív, ha $(a, b) \in R \text{ és } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$



Partíció: A H halmaz egy olyan részhalmaz-rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és $\bigcup_{i=1}^n H_i = H$

Tétel: Ha $R \subseteq H \times H$ ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek az egymással relációban álló elemeket tartalmazzák, azok a H halmaz egy partícióját adják.

Hasse-diagram: $a \leq b$, akkor b-t feljebb rajzolva összekötjük a-val, de nem kötjük össze a tranzitivitás miatt fenálló párokat.

Legnagyobb elem L_n , ha minden $h \in H$ -ra teljesül, hogy $h \leq L_n$ (L_n különbözik h-tól). A legnagyobb elem minden elemmel összehasonlítható.

Maximális elem M , ha nincs olyan $h \in H$, hogy $M \leq h$ teljesülne. (Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!)

Legkisebb elem l_k , ha minden $h \in H$ -ra $l_k \leq h$ (és l_k különbözik h-tól). Minden elemmel összehasonlítható.

Minimális elem m , ha nincs olyan $h \in H$, hogy $h \leq m$ teljesülne. Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!

A részben rendezett H halmaz valamely H_i részhalmazának a $K \in H$ **felső korlátja**, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$ -re $h_j \leq K$ teljesül.

A részben rendezett H halmaz valamely H_i részhalmazának a $k \in H$ **alsó korlátja**, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$ -re $k \leq h_j$ teljesül.

A legnagyobb alsó korlátot (ha létezik) **infimumnak**, a legkisebb felső korlátot pedig (ha létezik) **supremumnak** nevezzük.

Háló:

Definíció (részbenrendezett halmazokkal)

Ha egy részbenrendezett halmaz bármely kételemű részhalmazának van szuprémuma és infimuma, akkor a halmazt **hálónak** nevezzük.

Feladatok:

Döntse el, hogy az alábbi relációk ekvivalencia relációk-e!

1. Legyen R reláció, az angol „abc” betűiből képzett szavakon olyan, hogy $(a,b) \in R \Leftrightarrow L(a)=L(b)$, ahol L a szavak hosszát jelöli. ($L(x)$ = a szöveg hossza) ($a,b \in H$)

Ekvivalencia reláció

alma=alma

1.reflexív: $(a,a) \in R$

2.tranzitív: $a:=\text{alma}$, $b:=\text{Béla}$, $c:=\text{Gabi}$

$$(a,b) \in R \text{ és } (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$$3.\text{szimmetrikus: } L(a)=L(b) \Leftrightarrow L(b)=L(a)$$

2. $H = \langle x | x \text{ egyenes a síkban} \rangle$

$$(a,b) \in R \subseteq H \times H, \text{ ha } a \parallel b$$

$$\text{Reflexivitás: } a \parallel a$$

$$\text{Tranz.: } a \parallel b \text{ és } a \parallel c \Rightarrow b \parallel c$$

$$\text{Szim.: } a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$$

3. $H = \mathbb{R}$

$$(a,b) \in R \text{ ha } a-b \in \mathbb{Z}\text{-nek}$$

$$\text{Reflex.: } a-a=0 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Szim.: } a-b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b-a \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Tranz.: } a-b \in \mathbb{Z} \text{ és } b-c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-c \in \mathbb{Z}$$

Másképp:

$$a-b \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{+b-c \in \mathbb{Z}}$$

$$a-c \in \mathbb{Z} \text{ tehát igaz.}$$

4. Van 3 jó barát Aladár(A), Béla(B), Cili(B). Nekik az agyuk egy rugóra jár. Ez ekvivalencia reláció?

Igen. Mert:

$$A \Rightarrow A \text{ Aladárnak egy rugóra jár az aga önmagával (Reflexív.)}$$

$$A \Rightarrow B \text{ ebből következik, hogy } B \Rightarrow A \quad (\text{Szimmetrikus})$$

$$A \Rightarrow B \text{ és } B \Rightarrow C \text{ akkor } A \Rightarrow C \text{ tehát mindanyikuk agya egy rugóra jár. (Tranz.)}$$

Döntsük el a következő relációkról, hogy rendezési relációk-e és ha igen akkor részben vagy rendezett-e a halmaz.

$$1. (x,y) \in R, \text{ ha } x^2 \geq y^2 \quad H \in \mathbb{R}$$

Nem reláció mert nem antiszimmetrikus pl.: $(-x,x) \in R$ és $(x,-x) \in R$

$$2. (x,y) \in R, \text{ ha } 1/x \geq 1/y \quad H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Teljesen rendezett a reláció mert:

Reflexív $(x,x) \in R$ mert $1/x \geq 1/x$

Antiszimmetrikus: $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

$$1/x \geq 1/y \text{ és } 1/y \geq 1/x \Rightarrow x=y$$

Tranzitív: $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$$1/x \geq 1/y \text{ és } 1/y \geq 1/z \Rightarrow 1/x \geq 1/z$$

És teljesen rendezett, mert minden halmazbeli elem összehasonlítható

$$3. (x,y) \in R \text{ ha } x \text{ osztható } y\text{-nal } H = \mathbb{N} \text{ (a halmaz a természetes számok halmaza)}$$

Reflexív: $(x,x) \in R$ igaz, mert $x/x=1$

Antiszim.: $(x,y) \in R$ és $(y,x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

$$x/y \text{ és } y/x \Rightarrow x=y$$

Tranzitív: $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$$x/y \text{ és } y/z \text{ akkor } x/z \text{ ez is igaz}$$

és minden elem összehasonlítható, így teljesen rendezett a halmaz

4. Egy családban, ahol bármely két személynek különböző napra esik a születésnapja, tekintjük azt a relációt, mely szerint x személy relációban áll y személlyel, ha x nem idősebb y -nél. Milyen reláció ez? (Ha rendezés, akkor teljes rendezés-e ez a reláció?)

Hasse-diagramm:

5. Adott a háromelemű G halmaz, melynek hatványhalmaza (azaz összes részhalmazának halmaza) H . A és B H -beli elem akkor van relációban egymással, ha A részhalmaza B -nek. Vagyis:

$$G = \{x,y,z\} \text{ hatványhalmaza: } H = 2^G$$

$$A, B \in H \text{ esetén a két halmaz relációban áll: } (A,B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B$$

a) Bizonyítsa be, hogy a megadott reláció rendezési reláció! (2 pont)

b) Rajzolja fel a reláció Hasse-diagrammját! (2 pont)

c) Mi a maximális/minimális, legnagyobb/legkisebb elem? (2 pont)

d) Mi a suprémuma, és mi az infimuma a $\{x\}$ és $\{y,z\}$ elemeket tartalmazó részhalmaznak? (1 pont)

e) Háló-e a fenti reláció a megadott H halmazon? (1 pont)

6. Adott a következő halmaz: $H = \{2,4,6,8,10,12,16,20,24,40,120\}$. És adott a halmazon értelmezett rendezési reláció: **a** relációban áll **b**-vel ha **a** osztója **b**-nek.

- Rajzolja fel a rendezés Hasse-diagramját!
- Adja meg a Maximális és minimális elemeket!
- Adja meg a rendezés Legnagyobb és legkisebb elemét!
- Adja meg a $H' = \{4,8,12\}$ részhalmaz felső- és alsókorlátait, illetve suprémumát és infimumát!
- A H halmaz a megadott rendezéssel hálót alkot-e?

8. Az alaphalmaz elemei a következő szavak:

$H = \{ABA, ABBA, AB, A, AZ, AZT, ABZ, BZ, AZTA, BÚZA, BLÚZ\}$

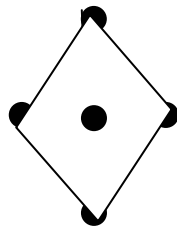
$(a, b) \in R \Leftrightarrow$ ha b szó tartalmazza a szót olyan módon, hogy a -hoz adva az abc valamelyik (akár nulla darab) betűjét megkapjuk a b szót úgy, hogy b szóban az a szó betűinek sorrendje nem változik..

Pl. $(AT, AUTÓ) \in R; (CÉ, CSÉ) \in R;$
 $(BÉLA, ÁDÁM) \notin R; (AZ, ZAB) \notin R$

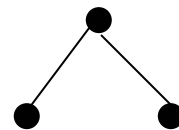
- Rendezési reláció-e, ha igen, teljes-e?
- Ábrázolja Hasse-diagrammon!
- Keresse meg a legnagyobb, legkisebb, maximum, minimum elemeit (ha vannak)!
- Keresse meg a $G = \{AB, ABZ, AZ\}$ részhalmaz infimumát és suprémumát!
- Hálót alkot-e a rendszer? Válaszát indokolja!

9. Hálót alkotnak-e a következő, Hasse-diagrammal megadott rendezési relációk:

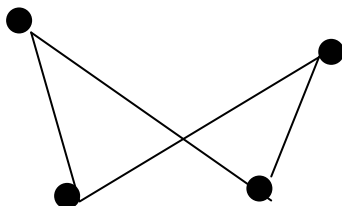
a)



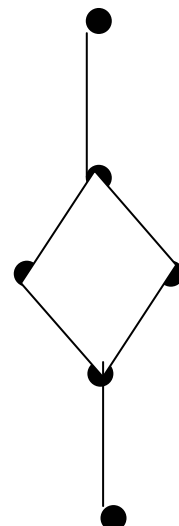
b)



c)



d)



10. Hálót alkotnak-e a megadott halmazok a következő rendezési relációval $(a,b) \in R$, ha $a|b$

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

b) $B = \{3, 5, 6, 9, 15, 30\}$

11. Írja föl a relációhoz tartozó Hasse-diagrammot.

$H = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 16, 35\}$,

$R = \{(1,1) (2,2) (4,4) (5,5) (7,7) (8,8) (16,16) (35,35) (1,2) (1,4) (1,5) (1,7) (1,8) (1,16) (1,35) (2,4) (2,8) (2,16) (8,16) (4,16) (7,35) (5,35)\}$

a) Ez részben- vagy teljes rendezés?

MO: részben pl. 4 a 8-cal nem hasonlítható össze

b) A $\{2, 8, 16\}$ halmaz részben- vagy teljesen rendezett halmaz a megadott rendezési relációval?
MO: teljesen.

c) Határozza meg a b) részben megadott halmaz alsó és felső korlátait valamint infimumát és szuprémumát!

MO:

alsó: 1, 2

felső: 16

inf: 2

sup: 16