Relációk

Def.: Az R lineáris reláció, ha R⊆AXB={(a, b) a∈A,b∈B}

Bináris relációk lehetséges tulajdonságai:

1.Reflexív, ha (a, a)∈R

2.(a) Szimmetrikus, ha *(a, b)* ∈ *R => (b, a)* ∈ *R*

2.(b) Antiszimmetrikus, ha (a, b) $\in R$ és $(b,a) \in R <=> a = b$

3. Tranzitív, ha $(a,b) \in R$ és $(b,c) \in R => (a,c) \in R$

Bináris Relációk

Ekvivalencia Reláció

Reflexív

Szimmetrikus

Tranzitív

Rendezési Reláció

Reflexív

Antiszimmetrikus

Tranzitív

Részben rendezett egy H halmaz, ha rendezési reláció van megadva H elemein. Nem biztos, hogy minden elem minden elemmel összehasonlítható.

Teljesen rendezett, ha ≤ reláció van megadva H-n, és a≤b és b≤a közül legalább az egyik teljesül. Bármely 2 elem összehasonlítható.

Partíció: A H halmaz egy olyan részhalamaz-rendszere, amelyre $H_i \cap H_j = \emptyset$ és $\cup_{i=1}^{n} H_i = H$

Tétel: Ha R⊆ HXH ekvivalencia reláció, akkor a H azon részhalmazai, amelyek az egymással relációban elemeket tartalmazzák, azok a H halmaz egy partícióját adják.

Hasse-diagram: a≤ b,akkor b-t feljebb rajzolva összekötjük a-val, de nem kötjük össze a tranzitivitás miatt fenálló párokat.

Legnagyobb elem *Ln*, ha minden $h \in H$-ra teljesül, hogy h≤Ln (Ln különbözik h-tól). A legnagyobb elem minden elemmel összehasonlítható.

Maximális elem M, ha nincs olyan h$\in H$, hogy M≤h teljesülne. (Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!)

Legkisebb elem lk, ha minden h$\in H$-ra lk≤h (és lk különbözik h-tól). Minden elemmel összehasonlítható.

Minimális elem m, ha nincs olyan h∈H, hogy h≤m teljesülne. Nem biztos, hogy minden elemmel összehasonlítható!

A részben rendezett H halmaz valamely $H_i$részhalmazának a K∈H **felső korálátja**, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$-re $h_j \leq K$ teljesül.

A részben rendezett H halmaz valamely valamely $H_i$részhalmazának a k∈H **alsó korálátja**,

, (az adott rendezés és H szerint), ha minden $h_j \in H_i$-re $k \leq h_j$teljesül.

A legnagyobb alsó korlátot (ha létezik) **infimumnak,** a legkisebb felső korlátot pedig (ha létezik) **supremumnak** nevezzük.

Feladatok

A következő feladatokban el kell dönteni, hogy az adott állítások ekvivalencia relációk-e.

1. Legyen R reláció, az angol „abc” betűiből képzett szavakon olyan, hogy (a,b)∈ R ⇔ L(a)=L(b), ahol L a szavak hosszát jelöli. (L(x)= a szöveg hossza)   (a,b∈H)

Ekvivalencia reláció

alma=alma

1.reflexív: (a,a)∈R

2.tranzitív: a:=alma, b:=Béla, c:=Gabi

(a,b)∈R és (b,c)∈R ⇒(a,c)∈R

3.szimmetrikus: L(a)=L(b)   ⇔ L(b)=L(a)

2. H=⟨x|x egyenes a síkban⟩

(a,b)∈ R ⊆ HxH, ha a||b

Reflexívitás: a||a

Tranz.: a||b és a||c $\Rightarrow$ b||c

Szim.: a||b $\Rightarrow$ b||a

3. H=R

(a,b)$\in$R ha a-b $\in$ Z-nek

Reflex.: a-a=0 $\in$ Z

Szim.: a-b $\in$ Z $\Rightarrow$b-a $\in$ Z

Tranz.: a-b$\in$ Z és b-c $\in$ Z $\Rightarrow$a-c$\in$ Z

Másképp:

$$\begin{array}{r} a-b\in Z \\ \underline{+b-c\in Z} \\ a-c\in Z \end{array}$$ tehát igaz.

4. A=(31;33;40;51;58;76;913)

Ennek egy partíciója: (51,33) (76,913,58) (40,31)

Adjon meg egy a partícióhoz tartozó ekvivalencia relációt.

Mo: (a,b)$\in$R ekvivalencia reláció, ha a és b számjegyeinek összege megegyezik.

5.Van 3 jó barát Aladár(A), Béla(B), Cili(B). Nekik az agyuk egy rugóra jár. Ez ekvivalencia reláció?

Igen. Mert:

A $\Rightarrow$ A Aladárnak egy rugóra jár az aga önmagával (Reflexív.)

A $\Rightarrow$ B ebből következik, hogy B $\Rightarrow$ A (Szimmetrikus)

A $\Rightarrow$ B és B $\Rightarrow$ C akkor A $\Rightarrow$ C tehát mindanyiuk agya egy rugóra jár. (Tranz.)

Rendezés:

Döntsük el a következő feladatokban, hogy rendezési relációk-e és ha igen akkor részben vagy rendezett e a halmaz.

1. $(x,y) \in R$, ha $x^2 \geq y^2$ $H \in R$

   Nem reláció mert nem antiszimmetrikus pl.: $(-x,x) \in R$ és $(x,-x) \in R$

2. $(x,y) \in R$, ha $1/x \geq 1/y$ $H=R \setminus (0)$

   Teljesen rendezett a reláció mert:

   Reflexív $(x,x) \in R$ mert $1/x \geq 1/x$

   Antiszimetrikus: $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

   $1/x \geq 1/y$ és $1/y \geq 1/x \Rightarrow x=y$

   Tranzitív: $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

   $1/x \geq 1/y$ és $1/z \geq 1/y \Rightarrow 1/z \geq 1/x$

   És teljesen rendezett, mert minden halmazbeli elem összehasonlítható

3. $(x,y) \in R$ ha x osztható y-nal H=N (a halmaz a természetes számok halmaza)

   Reflexív: $(x,x) \in R$ igaz, mert $x/x=1$

Antiszim.: $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$ csak úgy lehet ha $x = y$

x/y és $y/x \Rightarrow x=y$

Tranzitív: $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

x/y és y/z akkor x/y ez is igaz

és minden elem összehasonlítható, így teljesen rendezett a halmaz

Még feladat:

1. Tetszőleges H halmaz hatványhalmaza a halmaz-tartalmazás szerint részben rendezés:

$H:=\{1,2,3\}$, $2^H=\{\{\}\{1\}\{2\}\{3\}\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}\}$

Például: $\{1\} \leq \{1,2,3\}$

$\{1\} \leq \{1,2\}$

$\{1\} \leq \{1,3\}$

DE például {1} és {2,3} nem összehasonlítható

2. Valós számok és a szokásos ≤ teljes rendezés, minden szám összehasonlítható.

1.Rajzoljuk fel a következő halmaz Hasse-diagramját H=(1,2,3,4,6,9,12,18,36), és a≤b, ha lnko(a,b)=a. Mi a (4,6,9) rész halmaz infinuma, suprémama, alsókorlátja, felső korlátja, max., min.

Mo: Inf.: nincs

Alsókorlát: 1,2,3

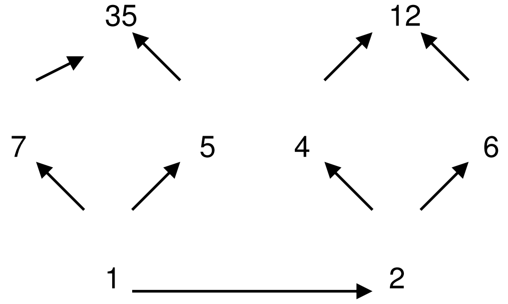
Sup.: nincs

Felső korlát: 12,18,36

Legkisebb elem: nincs

Legnagyobb elem: nincs

3.Adjuk meg a következő Hasse-diagram minimumát, maximumát, legnagyobb illetve a legkisebb elemét, majd adjuk meg a sup(2,6,12) illetve inf(2,6,12)-t is.



Mo.: Min:1

Max:12,35

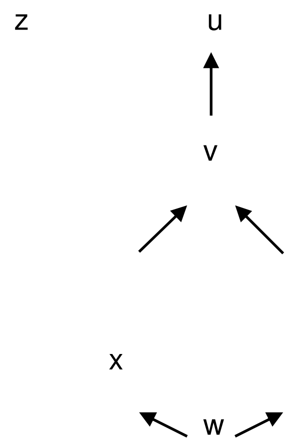
Lk.:1 Ln.:nincs

sup(2,6,12)=12 inf(2,6,12)=2

4.Rajzoljuk fel a következő relációban álló elemek Hasse-diagramját, majd adjuk, meg maximumát, minimumát, legnagyobb illetve legkisebb elemét, és részben vagy teljeses rendezett-e?

R=(u,u);(v,v);(w,w);(x,x);(y,y);(z,z);(w,x);(w,y);(w,u);(x,v);(x,u);(w,v);(y,v);(y,u);(v,u)

Mo:



Max.: z,u;   Min.: z,w

Ln.: nincs   Lk.: nincs

és csak részben rendezett a halmaz, mert nincs minden elem relációban

Egyéb feladatok

***. H:= {2,3, 4, 5, 6}, és a≤b, ha a osztója b-nek. Ekkor

Minimális elemek: 2,3,5

Maximális elemek: 4, 5, 6 (egyiknek sincsen többszöröse e halmazban)

E rendezésben nincsen sem legkisebb, sem legnagyobb elem.

****. A természetes számok a szokásos rendezésre: 0 a legkisebb és egyben minimális elem,

maximális és legnagyobb nincsen.

1.

Országok lakosainak száma a szokásos $\leq$ műveletre.

1.reflexív: (a,a)∈R

2.tranzitív: a$\leq b, \text{és } b \leq c => a \leq c$

3.antiszimmetrikus: a<=b és b<=a ⇔ b=a

RAT

3.

H=<xIx∈ R>

(a,b)∈R⊂ HXH, ha C

Reflexív: IaI≤IaI

IaI≤IbI és IaI≥IbI nemcsak akkor teljesül, ha a=b, ugyanis lehet (-a,a) vagy (a, -a) is, így az antiszimmetria nem teljesül, ezért nem rendezési reláció.

4.

H={az {1,2,3,5} hatványhalmazai}. Rendezés-e? Ha igen, akkor teljes?

-teljesen rendezett halmaz, mert az összes elemet össze tudom hasonlítani.

5.

Legyen H=IR. R⊂ HXH ,(a,b)∈ R, ha $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$.

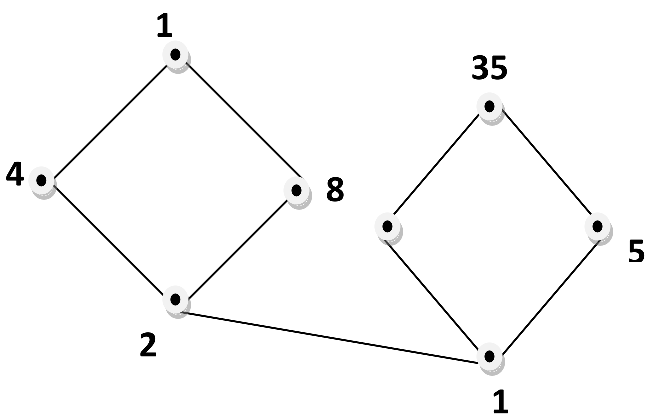
Rendezés-e?

Reflexív: $\frac{a}{a} \leq \frac{a}{a}$

Antiszimmetria: $\frac{a}{b} \leq \frac{b}{a}$ $és$ $\frac{b}{a} \leq \frac{a}{b}$ nemcsak akkor teljesül, ha $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, ugyanis ha átszorzunk a-val, két eset lehetséges a előjelétől függően. Két négyzetes tagot kapunk, vagyis előfordulhat a (-a, a), az (a,a), (-a, -a) vagy az (a,-a), így látjuk, hogy a nem feltétlenül kell egyenlő legyen b-vel, ezért az antiszimmetria nem teljesül.

(külön feladatként kiköthető, hogy csak IR+-on legyen értelmezve, ebben az esetben RAT, ugyanis az antiszimmetria is teljesül, a tranzitivitás pedig könnyen belátható)

6.



Min: 1

Maximum: 16,35

Legkisebb:1

Legnagyobb: nincs

Részben rendezés, ugyanis nem hasonlítható össze minden elem minden elemmel.

Határozzuk meg a {2,8,16} részhalmaz alsó korlátját, infimumát, felső korlátját ill. a supremumát.

Teljes rendezés-e?

Alsó korlát: 1,2 Inf: 2

Felső korlát: 16, sup.: 16

Teljes rendezés