Név: Bolla Ferenc **NEPTUN KÓD:** T870PX **CSOPORT:** 1.

1. Zárthelyi dolgozat Diszkrét Matematika I. tárgyból

$\Sigma = 24p$

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét: **Kis-Tóth Ágnes** **Szabó Kornélia**

Összpontszám: 50 pont

Minden megoldást indokoljon! Csak eredmény közléséért nem jár pont.

1. a) Egy rendhagyó 10x10-es méretű sakktáblán szeretnénk egy bástyával a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba eljutni. Hányféle útvonalon tehetjük ezt meg, ha csak jobbra és lefelé léphetünk?

jobbra 9 lépés
lefele 9 lépés

Ha ~~[illegible]~~ 9 jobbra és 9 lefele lépést végzünk akármilyen ~~[illegible]~~ útvonalon megyünk.

9! 9! féle útvonal létezik

b) Az idei gólyabál táncra 11 lány és 8 fiú jelentkezett. Hányféleképpen alakulhat ki belőlük 8 táncoló pár, ha mindig egy fiú és egy lány alkot egy párt?

8 táncoló pár → 8 fiú és 8 lány kell

8! $\binom{11}{8}$ ~~[illegible]~~

$\binom{11}{8} \cdot 8!$

~~8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1~~

~~11 · 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4~~

c) A kialakult 8 páros egy körtáncot táncol. Hányféle felállás lehetséges, ha a körben a fiúk és lányok felváltva állnak és minden lánynak a jobb oldalán áll a párja? (7 pont)

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7} = 5040$

egy fix helyen van

5p

2. Formalizálja az alábbi mondatokat! (4 pont)

a) $\underbrace{\text{Megmászom a Mount Everestet}}_{M}$ amint $\underbrace{\text{piros hó esik}}_{P}$ vagy legalább $\underbrace{\text{fúj a kék szél}}_{K}$.

$$(P \vee K) \rightarrow M$$

b) Ha sikerül visszamennem a múltba, akkor találkozom Marty McFly-jal, de ha nem, akkor elmegyek a karácsonyi koncertre és sütök süteményt a jótékonysági süti-vásárra.

M – visszamenni a múltba
T – találkozni Marty McFly-jal
K – elmegyek karácsonyi koncertre
S – sütök sütit

$$(M \rightarrow T) \vee (K \wedge S)$$

3p

3. Döntse el igazságtáblával, hogy a két formula ekvivalens-e! (4 pont)

$$\neg(C \vee \neg A) \wedge (B \rightarrow C) \equiv \neg(((B \rightarrow C) \rightarrow \neg(A \wedge \neg C))$$

A	B	C	¬A	∨C	¬(C∨¬A)	∧	B→C	$\overset{?}{\equiv}$	B→C	→	¬	A∧	¬C	¬((B→C)→¬(A∧¬C))
i	i	i	H	i	H	H	i		i	i	i	H	H	H
i	i	H	H	H	i	H	H		H	i	H	i	i	H
i	H	i	H	i	H	H	i		i	i	i	H	H	H
i	H	H	H	H	i	H	H		H	i	H	i	i	H
H	i	i	i	i	H	H	i		i	i	i	H	H	H
H	i	H	i	i	H	H	H		H	i	i	H	i	H
H	H	i	i	i	H	H	i		i	i	i	H	H	H
H	H	H	i	i	H	H	H		H	i	i	H	i	H

Tehát a két formula ekvivalens

azonos

3p

4. a) Fogalmazza meg a logikai következmény definícióját! (2 pont)

0

b) Rezolúció segítségével igazolja, hogy helyes az alábbi következtetési séma! (6 pont)

$\ell_1 \quad \neg((C \rightarrow A) \wedge \neg D)$

$\ell_2 \quad D \rightarrow \neg(B \vee \neg C)$ $\qquad (\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \neg B) \models H$

$\beta \quad B \rightarrow \neg A \quad \equiv \neg B \wedge \neg A \Rightarrow \neg\beta \equiv B \wedge A$

2p

~~$\ell_2 \equiv D \rightarrow \neg(B \vee \neg C) \equiv D \rightarrow (\neg B \wedge C) \equiv \neg D \wedge \neg B \wedge C$~~

$\ell_1 \equiv \neg((\neg C \overset{\vee}{\wedge} A) \wedge \neg D) \equiv C \wedge \neg A \wedge D$

$\ell_2 \equiv D \rightarrow \neg(B \vee \neg C) \equiv D \rightarrow (\neg B \overset{\wedge}{\vee} C) \equiv \neg D \overset{\vee}{\wedge} (\neg B \vee C) \quad \neg D \wedge \neg B \wedge \neg C$

~~$B \wedge A$~~

$C \wedge \neg A \wedge D$

$\neg D \wedge \neg B \wedge \neg C$ $\qquad \rightarrow \neg A \wedge \neg B \rightarrow H$

$B \wedge A$

5. a) Milyen struktúrát határoz meg a kétdimenziós vektorok halmazán a szokásos összeadás művelet? (2 pont)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

① $\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{B}$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{J}$ ✓

② ✓ $\exists e \; \forall a \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ✓

③ ✓ $\forall a \; \exists a^{-1}$ $a + a^{-1} = e \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-a_1 \\ a_2-a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

④ ✓ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{B}$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{J}$ ✓ Abel-csoport

2p

b) Milyen struktúrát határoz meg az a) részben is használt szokásos összeadás és az alább definiált * mint szorzás műveletek a két dimenziós valós vektorok halmazán? (3 pont)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$+ ; *$ ① ✓ $a*(b+c) = ab+ac$

② $(a+b)*c = ac+bc$

$\boxed{B}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1+c_1 \\ b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (b_1+c_1) \\ a_2 \cdot (b_2+c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1b_1+a_1c_1 \\ a_2b_2+a_2c_2 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\boxed{J}$ $\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_1c_1 \\ a_2b_2+a_2c_2 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(a_1+b_1) \\ c_2(a_2+b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1a_1+c_1b_1 \\ c_2a_2+c_2b_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{B}$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 \\ a_2c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1+b_1c_1 \\ a_2c_2+b_2c_2 \end{pmatrix}$ $\boxed{J}$ ✓

$*$ ① ✓ $(a*b)*c = a*(b*c)$

$\boxed{B}$ $\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \end{pmatrix}$ ✓

$\parallel$

$\boxed{J}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \end{pmatrix}$

② ✓ $\exists e \; \forall a$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cdot 1 \\ a_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ✓

③ ✓ $\forall a \; \exists a^{-1}$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \cancel{*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists a^{-1}$ ✓

2p

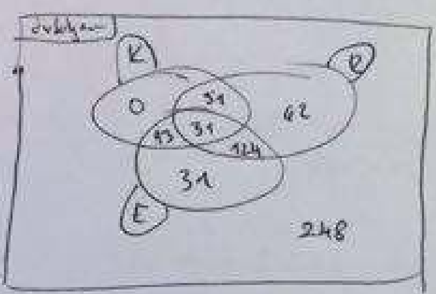
Tehát ezek egy egységelemes gyűrűt határoznak meg. ✓

6. Egy egyetemi évfolyamon 620 diák tanul. Közvélemény kutatás keretében (amin mindenki részt vett) felmérték a hallgatók zenei ízlését. A megkérdezettek 25%-a szereti a klasszikus zenét, 40%-a a rock-ot és 45% az elektronikus zenét. A hallgtók 10%-a a klasszikus és rock zenét is szereti, 20%-uk a klasszikusat és az elektronikusat is, 25%-uk rock-ot és az elektronikusat is, valamint a diákok 5%-a mindhárom műfajt kedveli. Az évfolyamon hány olyan ember van, aki a három zenei műfaj egyikét sem kedveli? (5 pont)

$|K| = 155$ $\quad |K \wedge R| = 62$ $\quad |K \wedge R \wedge E| = 31$

$|R| = 248$ $\quad$ ~~[illegible]~~ $|K \wedge E| = 124$

$|E| = 279$ $\quad |R \wedge E| = 155$



Tehát 248 ember van, aki nem szereti a három zenei műfaj egyikét sem.

5p

7. Adott a következő halmaz: H = {1,3,6,9,12,15,18,36}, és a halmazon értelmezett rendezési reláció, mely szerint **a** relációban áll **b**-vel ha **a** osztója **b**-nek.

a. Rajzolja fel a részben rendezett halmaz Hasse-diagramját!

b. Adja meg a maximális, minimális elemeket, illetve a legnagyobb és legkisebb elemeket!

c. Adja meg az „A" részhalmaz alsó- és felső korlátait, valamint infimumát és szupremumát!

A = {12, 18, 36}

e. Döntse el, hogy a megadott részben rendezett halmaz hálót alkot-e? (6 pont)

? Ez nem [illegible]? :)

0p