NÉV: **NEPTUN KÓD:** **CSOPORT:**

Diszkrét matematika I - 1. Zárthelyi dolgozat

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Kis-Tóth Ágnes **Szabó Kornélia**

Válaszát minden esetben indokolja! Indoklás nélküli válaszért nem jár pont!

1. Egy egyetemen az első évfolyamos hallgatóknak három matematika tárgyuk van az első félévben: analízis, diszkrét matek és lineáris algebra. A félév végén a hallgatók 52%-a sikeresen vizsgázik analízisből, 64%-uknak sikerül a lineáris algebra és a diákok 38%-a átmegy a diszkrét matek vizsgán. 34%-nak sikerül az analízis és a lineáris algebra, 16%-nak az analízis és a diszkrét matematika, és 15 embernek mindhárom tárgy. Hány hallgatóknak sikerül a lineáris algebra és a diszkrét matek is, ha összesen 250 hallgató van az első évfolyamon és 10 hallgatónak egyik tárgy sem sikerül? (6 pont)

összesen: 250 fő
analízis (A) 52% → 130 fő
anal + LA: 34% → 85 fő
mindhárom: 15 fő

LA: 64% → 160 fő
DM: 38% → 95 fő
anal + DM: 16% → 40 fő
egyik sem: 10 fő

Szita formula:

$$\underbrace{|A \cup LA \cup DM|}_{250-10} = |A| + |LA| + |DM| - |A \cap LA| - |A \cap DM| - |LA \cap DM| + |A \cap LA \cap DM|$$

$$250 - 10 = 130 + 160 + 95 - 85 - 40 - x + 15$$

$x = 5 \Rightarrow$ 5 embernek sikerült az LA és a DM, de az anal nem.

2.a, Elfelejtettem a telefonom 4 jegyű PIN kódját. A következőkre emlékszem belőle: páratlan számok nem voltak benne, nem nullával kezdődött és pontosan három különböző számból állt. Hányféle esetet kéne végig próbálnom, hogy megtaláljam a helyes kódot? (8 pont)

a) 4 jegyű számok, pontosan 3 számjegy ismétlődik, csak páros számok

1. Kiválasztok 3 páros számot: $\binom{5}{3}$ → Betűvel jelölöm őket: α, β, γ
2. Sorbarendezem úgy, hogy α ismétlődik: $\frac{3!}{2!}$ (ism. perm.)
3. ——— " ——— β ——— " ———
4. ——— " ——— γ ——— " ———

} összeadódnak: $\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 \cdot 3$

$\Rightarrow \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 3$ lehetőség

b) Ezek közül azok, amik 0-val kezdődnek:

1) A 0 ismétlődik: Választok 2 másik számot a $\{2,4,6,8\}$ számok közül és sorbarendezem az egyik nullával együtt (másik fixen az elején) → $\binom{4}{2} \cdot 3!$

2) Nem a 0 ismétlődik: Választok 2 másik számot, amiből az egyik ismétlődik: $\binom{4}{2} \frac{3!}{2!}$

$\Rightarrow$ A megoldás a) és b) különbsége: $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 3 - \left(\binom{4}{2} \cdot 3! + \binom{4}{2} \frac{3!}{2!}\right) = 72$

b, Egy 32 lapos magyar kártya pakliból 6 lapot húzok ki egyszerre. Hány esetben lesz a kiválasztott lapok között pontosan két felső és egy zöld? (6 pont)

$1\cdot 3\cdot\binom{21}{4}+7\cdot 3\binom{21}{3}$

Esetszétválasztás:

→ A két felső közül az egyik zöld:
- A zöld felsőt egyféleképp választhatom ki: 1
- A másik felsőt pedig a maradék 3 felső közül: $\binom{3}{1}=3$
- A további 4 lapot a maradékból húzom (ami se nem zöld, se nem felső)

$\Big\}\ 1\cdot 3\cdot\binom{21}{4}$

$\binom{32-8-3}{4}=\binom{21}{4}$

→ A két felső közül egyik sem zöld
- A zöld lap nem lehet felső, ezért 7-ből választom ki: $\binom{7}{1}=7$
- A két felső közül egyik sem zöld: $\binom{3}{2}=3$
- A további 3 lapot a maradékból húzom (ami nem zöld és nem felső): $\binom{21}{3}$

$\Big\}\ 7\cdot 3\binom{21}{3}$

3. Igazolja az alábbi halmazelméleti azonosságot a kétoldali tartalmazás módszerével (6 pont)

$$(B-C)\cup A=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$$

Az egyik oldal:

$(B-C)\cup A \Rightarrow x\in[(B-C)\cup A] \Rightarrow x\in(B-C)$ vagy $x\in A \Rightarrow (x\in B$ és $x\notin C)$ vagy $x\in A$

$\Rightarrow (x\in B$ és $x\in\overline{C})$ vagy $x\in A \Rightarrow (x\in B$ vagy $x\in A)$ és $(x\in\overline{C}$ vagy $x\in A) \Rightarrow$

disztributív azonosság

kommutativitás

$\Rightarrow (x\in A$ vagy $x\in B)$ és $(x\in A$ vagy $x\in\overline{C}) \Rightarrow [x\in(A\cup B)]$ és $[x\in(A\cup\overline{C})] \Rightarrow x\in[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]$

Tehát ha $x\in[(B-C)\cup A]$, akkor $x\in[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]$, vagyis $[(B-C)\cup A]\subseteq[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]$

egyoldali tartalmazás

A másik oldal:

Az előző feladatrészben csak ekvivalens átalakítást használtam, tehát az összes lépés visszafelé is igaz (pl a $x\in A$ vagy $x\in C \Rightarrow x\in A$ állítás helyes, de nem igaz visszafelé)

Vagyis ha $x\in[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]$, akkor $x\in[(B-C)\cup A]$, vagyis $[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]\subseteq[(B-C)\cup A]$

És akkor rakjuk fel a koronát a feladatra...

másik egyoldali tartalmazás

Mivel $\subseteq$ rendezési reláció (amire igaz az antiszimmetria), ezért

ha $[(B-C)\cup A]\subseteq[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]$ és $[(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})]\subseteq[(B-C)\cup A]$,

akkor és csak akkor $\underline{\underline{(B-C)\cup A=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})}}$

Ezt a ZH-ban nyilvánvalóan nem kell ennyire részletesen, de az fontos, hogy mindkét egyoldali tartalmazást belásd valahogy.

4.

a, Döntse el, hogy az egész számok halmaza a megadott $\oplus$ művelettel milyen struktúrát határoz meg! Állítását indokolja! (7 pont)

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a \oplus b = a + b - 42$

a) Zárt? → Mivel az egész számok a szokásos összeadásra és kivonásra zártak, ezért ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $(a+b-42) \in \mathbb{Z}$, vagyis zárt a művelet ✓

b) Asszociatív? → igaz-e, hogy $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$?

$(a \oplus b) \oplus c = (a+b-42) \oplus c = (a+b-42)+c-42 = a+b+c-84$ } a kettő egyenlő, tehát a műveletünk asszociatív ✓

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b+c-42) = a+(b+c-42)-42 = a+b+c-84$

c) Egységelem? 1) Vagy megsejtem, és utána bizonyítom, hogy tényleg egységelem
2) Általános formában felírom, és megkeresem → ezt csinálom most

Melyik $e \in \mathbb{Z}$ elem az, amire igaz: $a \oplus e = a$? ✓

$a \oplus e = a + e - 42 = a \overset{-a}{\Longrightarrow} e - 42 = 0 \overset{+42}{\Longrightarrow} \underline{e = 42}$ ⇒ ez az egységelem

d) Inverz? Itt is általános forma alapján keresem: Melyik az a $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ elem, melyre $a \oplus a^{-1} = e$?

$a \oplus a^{-1} = a + a^{-1} - 42 = e = 42 \overset{+42}{\Longrightarrow} a + a^{-1} = 84 \overset{-a}{\Longrightarrow} \underline{a^{-1} = 84 - a}$ → a-tól függ, de az nem baj!

e) Kommutatív? → Igaz-e, hogy $a \oplus b = b \oplus a$

$a \oplus b = a + b - 42$ } ez a kettő az egész számokon értelmezett szokásos összeadás kommutativitása miatt egyenlő ⇒ a művelet kommutatív ✓

$b \oplus a = b + a - 42$

⇒ Ez egy Abel-csoport

b, Tekintsük az egész számok halmazán a korábban definiált $\oplus$ műveletet mint összeadást és az alábbi $*$ műveletet mint szorzást. Milyen struktúrát kapunk így? Állítását indokolja! (7 pont)

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a * b = 42$

a) Zárt? $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a * b) \in \mathbb{Z}$ → ez igaz ✓

b) Asszociatív? $(a * b) * c = a * (b * c)$

$(a * b) * c = 42 * c = 42$ ← ez is egy egész szám, erre is alkalmazhatom a műveletet

} egyenlőek → asszociatív ✓

$a * (b * c) = a * 42 = 42$

c) Egységelem? Nincs, mivel $\nexists e\ \forall a \in \mathbb{Z}: a * e = a$ (csak a 42-nek van egységeleme)

+1) Disztributív? $\underbrace{(a \oplus b) * c = (a * c) \oplus (b * c)}_{\text{első rész}}$ és $\overbrace{c * (a+b) = (c * a) + (c * b)}^{\text{második rész}}$

? mivel a $*$ műveletről nem láttam be, hogy kommutatív, ezért mindkettőt ellenőriznem kell

$(a \oplus b) * c = (a + b - 42) * c = 42$

$(a * c) \oplus (b * c) = 42 + 42 - 42 = 42$

} első rész igaz } így beláttuk a kommutativitást is

$c * (a \oplus b) = c * (a + b - 42) = 42$

$(c * a) \oplus (c * b) = 42 \oplus 42 = 42 + 42 - 42 = 42$

} ez is igaz

⇒ A $\langle \oplus, *, \mathbb{Z} \rangle$ struktúra kommutatív gyűrűt alkot

5. Ismertesse, mit értünk ismétléses és ismétlés nélküli variáción? Hogyan lehet kiszámítani ezek számát? Bizonyítsa be mindkét képletet! (6 pont)

a) Ismétléses variáció: Adott n elem, melyek közül valamennyit el szeretnénk helyezni k db helyen úgy, hogy egy elemet többször is felhasználhatok és a helyek sorrendje számít.

$V_n^{k,i} = n^k$ => k hely mindegyikére n db elem kerülhet (mivel ismétléses variáció): $\underbrace{\underline{n}\ \underline{n}\ \underline{n} \dots \underline{n}}_{k \text{ db}}$

-> A helyek függetlenek abban, hogy az n elem közül melyik kerül beléjük, tehát esetek száma összeszorzódik: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ db}} = n^k$

b) Ismétlés nélküli variáció: Adott n db elem, melyek közül k db-ot kiválasztok, és ezeket sorbarendezem (minden elemet egyszer használva fel)

$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ => n elem sorbarendezése n! féleképpen lehetséges

-> Ebből csak az első k db elem sorbarendezése érdekel, a többi (n-k) elemé (helyé) nem

-> Mivel az esetek számai itt is szorzódnak (függetlenek a helyek) ezért ezen esetek számával osztom (és nem kivonom)

6. Ismertesse a binomiális tételt. Mivel egyenlő a binomiális együtthatók összege: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$?

Bizonyítsa állítását! (4 pont)

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ -> Bizonyítás: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \underset{\substack{a=1 \\ b=1}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

NÉV: **NEPTUN KÓD:** **CSOPORT:**

Diszkrét matematika I - 1. Zárthelyi dolgozat

Kérjük, karikázza be gyakorlatvezetője nevét!

Kis-Tóth Ágnes **Szabó Kornélia**

Válaszát minden esetben indokolja! Indoklás nélküli válaszért nem jár pont!

1.Igazolja az alábbi halmazelméleti azonosságot a kétoldali tartalmazás módszerével (6 pont)

$$(C \cup A) \cap (C \cup \overline{B}) = C \cup (A - B)$$

2. a, Döntse el, hogy az egész számok halmaza a megadott $\oplus$ művelettel milyen struktúrát határoz meg! Állítását indokolja! (7 pont)

$$a \oplus b = a + 27 + b$$

b, Tekintsük az egész számok halmazán a korábban definiált $\oplus$ műveletet mint összeadást és az alábbi $*$ műveletet mint szorzást. Milyen struktúrát kapunk így? Állítását indokolja!
(7 pont)

$$a * b = -27$$

3. a, Elfelejtettem a telefonom 4 jegyű PIN kódját. A következőkre emlékszem belőle: páros számok nem voltak benne, nem kilenccel kezdődött és pontosan három különböző számból állt. Hányféle esetet kéne végig próbálnom, hogy megtaláljam a helyes kódot? (8 pont)

b, Egy 32 lapos magyar kártya pakliból 6 lapot húzok ki egyszerre. Hány esetben lesz a kiválasztott lapok között pontosan két makk és egy király? (6 pont)

4. Egy egyetemen a hallgatók három szabadidős foglalkozás közül választhatnak: túrázás, énekkar és színjátszó kör. A hallgatók 38%-a túrázik, 60%-uk énekkaros és 32%-uk a színjátszó kör tagja. A túrázók fele énekkarra is jár, 20%-uk énekkaros és mellette színészkedik is, és 22 ember mindhárom szakkörre jár. Hány hallgatók jár egyszerre színjátszó körbe és túrázni is, ha összesen 500 hallgató van az első évfolyamon és 120 hallgató semmilyen szabadidős tevékenységen nem vesz részt? (6 pont)

5. Ismertesse, mit értünk ismétléses és ismétlés nélküli kombináción? Hogyan lehet kiszámítani ezek számát? Bizonyítsa be az ismétlés nélküli kombinációk számára vonatkozó képletet! (6 pont)

6. Mivel egyenlő a $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\binom{n}{k}$, a binomiális együtthatók váltakozó előjelű összege? Bizonyítsa állítását! (4 pont)