Logika 3. konzultáció

1) Igazságtábla

a)Add meg a ¬ ((A→B) →A) ∨((A∨B) ∧A) formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	¬ (	(A→B)	→A)	∨	((A∨B)	∧A)
sorrend		3.	1.	2.	6.	4.	5.
I	I	H	I	I	I	I	I
I	H	H	H	I	I	I	I
H	I	I	I	H	I	I	H
H	H	I	I	H	I	H	H

b) Add meg a ((¬B→C)∨(A∧B))→(¬A) formula kiértékelését minden interpretációban!

A	B	C	((¬B	→C)	∨	(A∧B))	→	(¬A)
sorrend			1.	2.	4.	3.	6.	5.
I	I	I	H	I	I	I	H	H
I	I	H	H	I	I	I	H	H
I	H	I	I	I	I	H	H	H
I	H	H	I	H	H	H	I	H
H	I	I	H	I	I	H	I	I
H	I	H	H	I	I	H	I	I
H	H	I	I	I	I	H	I	I
H	H	H	I	H	H	H	I	I

2) Formalizáljuk a következő mondatokat!

- Ödön vagy Jakab otthon van, de nincs otthon mind a kettő.
  megoldás: [(Ödön otthon van) ∨(Jakab otthon van)] ∧¬[(Ödön otthon van) ∧(Jakab otthon van)]

- Ha nem esik az eső, de süt a nap, vagy a szél fúj, akkor elindulunk és szerencsésen megérkezünk; vagy megváltozik az idő, és tábort verünk, vagy visszafordulunk.
  megoldás: [(¬(esik az eső)∧((süt a nap)∨¬(fúj a szél)))→((elindulunk)∧(szerencsésen megérkezünk))] ∨((megváltozik az idő)∧((tábort verünk)∨(visszafordulunk)))

- Szivárványt csak akkor láthatunk, ha a nap is süt, és az eső is esik, és nincsen dél.
  megoldás: (szivárványt látok)→((süt a nap)∧(esik az eső)∧¬(dél van))

3) Disztributív szabályok

A∧ (B ∨ C) ≡ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

A	B	C	A∧	(∨)		(∧)	∨	(∧)
I	I	I	I	I		I	I	I
I	I	H	I	I		I	I	H
I	H	I	I	I		H	I	I
I	H	H	H	H		H	H	H
H	I	I	H	I		H	H	H
H	I	H	H	I		H	H	H
H	H	I	H	I		H	H	H
H	H	H	H	H		H	H	H

4) Következtetési sémák

Def.: Modellelméleti vagy szemantikus következményfogalom: Azt mondjuk, hogy az {α1, α2, …,αn} formulahalmaz következménye a β formula, ha minden olyan interpretációban, amelyben az α1 , α2, …αn formulák igazak, β is igaz.

Bizonyítsd a **hipotetikus szillogizmus** helyességét háromféleképpen!

$\{ \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \models_0 \alpha \rightarrow \gamma$

a)

α	β	γ	α → β	∧	β →γ	α → γ
I	**I**	**I**	I	I	I	I
I	**I**	**H**	I	H	H	H
I	**H**	**I**	H	H	I	I
I	**H**	**H**	H	H	I	H
H	**I**	**I**	I	I	I	I
H	**I**	**H**	I	H	H	I
H	**H**	**I**	I	I	I	I
H	**H**	**H**	I	I	I	I

b) Tétel: $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha α→β tautológia.

$\{\alpha\rightarrow\beta, \beta\rightarrow\gamma\} \models_0 \alpha\rightarrow\gamma \equiv ((\alpha\rightarrow\beta) \wedge \beta\rightarrow\gamma) \rightarrow (\alpha\rightarrow \gamma)$ Tautológia

α	β	γ	(α → β	∧	β →γ)	→	α → γ
sorrend			1	3	2	5	4
I	**I**	**I**	I	I	I	I	I
I	**I**	**H**	I	H	H	I	H
I	**H**	**I**	H	H	I	I	I
I	**H**	**H**	H	H	I	I	H
H	**I**	**I**	I	I	I	I	I
H	**I**	**H**	I	H	H	I	I
H	**H**	**I**	I	I	I	I	I
H	**H**	**H**	I	I	I	I	I

c) Tétel: $\alpha \models_0 \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \wedge \neg\beta$ azonosan hamis.

$\{\alpha\to\beta, \beta\to\gamma\} \models_0 \alpha\to\gamma \quad \equiv \quad ((\alpha\to\beta) \wedge \beta\to\gamma\ ) \wedge \neg(\alpha\to\gamma)$ Tautológia

α	β	γ	(α → β	∧	β →γ)	∧	¬	α → γ
sorrend			1	3	2	6	5	4
I	**I**	**I**	I	I	I	H	H	I
I	**I**	**H**	I	H	H	H	I	H
I	**H**	**I**	H	H	I	H	H	I
I	**H**	**H**	H	H	I	H	I	H
H	**I**	**I**	I	I	I	H	H	I
H	**I**	**H**	I	H	H	H	H	I
H	**H**	**I**	I	I	I	H	H	I
H	**H**	**H**	I	I	I	H	H	I

5) Alakítsd KNF-re!
   a. **(A→D)→C** ≡ (¬AvB)→C ≡ ¬(¬AvB)vC ≡ (A∧¬B)vC ≡ **(AvC)∧(Av¬B)**
   b. **A∧(B→C)** ≡ A∧(¬BvC) ≡ (A∧¬B)v(A∧C) ≡ [(A∧¬B)vA]∧[(A∧¬B)vC] ≡ [(AvA)∧(¬BvA)]∧[(AvC)∧(¬BvC)] ≡ **A∧(¬BvA)∧(AvC)∧(¬BvC)**

6) Igazold rezolúcióval!
   c. Első feladat
      - A kertben kutya, macska, vagy rigó lakhat, de egyikük biztosan.
      - Rigó és macska nem lakik egy kertben.
      - A kertben négylábú biztos lakik.
      - A kertben lakik rigó.
      - **Következmény:** A kertben kutya és rigó lakik.

1) K v M v R

2) ¬(R ∧ M) = (¬R v ¬M)

3) K v M

4) R

K) K ∧ R -> ¬(K ∧ R) ≡ ¬K v ¬R

K v M v R

¬R v ¬M

K v M

R

¬K v ¬R

M v R

¬K

□ ✓

K v M v R

¬R v ¬M

K v M

R

¬K v ¬R

K v ¬R

K

¬K

□ ✓

d. Egy nyomozás során három gyanúsítottunk van: A,B és C. A nyomozó a gyanúsítottak kihallgatása során az alábbi következtetésekre jutott:
   - Ha A bűnös és B nem bűnös, akkor C is bűnös.
   - C soha nem dolgozik egyedül
   - A soha nem dolgozik C-vel
   - csak A vagy B vagy C lehetnek a tettesek
   - Köv.: B a tettes

1) $(A \wedge \neg B) \to C \equiv \neg(A \wedge \neg B) \vee C \equiv \neg A \vee B \vee C$

2) $C \to (A \vee B) \equiv \neg C \vee A \vee B$

3) $\neg A \vee \neg C$

4) $A \vee B \vee C$

K) $B \Rightarrow \neg B$

$\neg A \vee B \vee C$

$\neg C \vee A \vee B$

$\neg A \vee \neg C$

$A \vee B \vee C$ $\quad A \vee C \quad \square$

$\neg B$