Nulladrendű logika

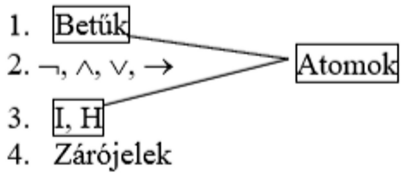
2016. december 10., szombat 12:46

ELMÉLET

Megjegyzések:

- **Ez nem hivatalos anyag**, nem feltétlenül tartalmaz mindent, igyekeztem a lényeget kiemelni.
- Véleményem szerint aki a **felkiáltójeles sorok**at nem tudja, annak (gimis tanánárom szavaival élve) annyi esélye sem lesz ZH-n, mint Szálasi Ferencnek a népbíróság előtt…
- ! **Ahol a későbbiekben görög betűket használok, ott a görög betű formulát rejt, tehát a görög betűk helyére bárhol be lehet helyettesíteni bármilyen összetett formulát** (persze azonos görög betű azonos formulát jelent…)**.**
- Szürkére színeztem azokat a magyarázatokat, amik nélkül lehet jó zh-t írni, de a definíciók memorizálásához illetve a mélyebb megértéshez hasznosak.

Jelkészlet:



★ **Definíciók:**

- **Igazságérték**: igaz vagy hamis -> **ítéletkonstans**: I és H
- **Ítéletváltozók:** nagybetűkkel jelöljük, igazságértékeket hordoznak (pl: A, B, C)
- ! **Formula**: logikai kifejezés (pl: (A∧B)→¬DVC)
- **Atomi formula**: egytagú formula -> igazságérték vagy ítéletváltozó
- ! Adott formula egy **interpretációja**: behelyettesítünk az összes ítéletváltozóba egyenként igaz vagy hamis értékeket
  - másképp: igazságtábla egy sora
- ! **Tautológia**: az a formula, ami minden interpretációban igaz
- ! **Kontradikció**: az a formula, ami minden interpretációban hamis
- **Modellek**: azok az interpretációk, ahol a formula igaz

★ **Műveletek**:

- ! **Negálás (NEM)**: ¬
  - Ha a mögötte álló kifejezés (formula) igaz, akkor hamis lesz az értéke, egyébként pedig igaz
- ! **Konjunkció (És)**: ∧
  - Csak akkor igaz, ha a bal és jobb oldalt álló formulák adott interpretációban *egyszerre igazak*
- ! **Diszjunkció (VAGY)**: ∨
  - Csak akkor igaz, ha a bal és jobb oldalt álló formulák küzül adott interpretációban *legalább az egyik* igaz
- ! **Implikáció (HA … AKKOR)**: →
  - Csak akkor hamis, ha a bal oldalon álló formula adott interpretációban igaz, de a jobb oldali hamis ("*Megnyertem a lottót, de nem adok belőle neked*" esete…)
- Az következő műveletek csak a teljesség kedvéért szerepelnek. Jól tudnak jönni a formalizálásnál, de lehetőleg ne használjátok őket a megoldás megadásánál.
- **Ekvivalencia művelet**: ⇔
  - Csak akkor igaz, ha a két oldalán levő formulák értéke adott interpretáció esetén *ugyanaz* (vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis)
- **Kizáró vagy / nem egyenlő**: XOR, ⊕, **v** stb
  - Csak akkor igaz, ha a két oldalán levő formulák adott interpretációban különbözőek (egyik igaz, másik hamis)

★ Konjunkció (ÉS) és diszjunkció (VAGY) **tulajdonságai**:

- **Zárt**:
  - ha α,β∈{I, H} akkor α∨β∈{I, H}
  - ha α,β∈{I, H} akkor α∧β∈{I, H}
- ! **Egységelem**:
  - α∧I ≡ α
  - β∨H ≡ β
- **Inverz**:
  - α∧α ≡ I
  - diszjunkciónak (VAGY) nincs inverze!

- **Asszociatív**:
  - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
  - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- **Kommutatív**:
  - $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
  - $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$

★ Azonosságok:

! - **De Morgan**:
  - $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
  - $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$

! - **Implikáció** átalakítása:
  - $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$

! - **Disztributív** tulajdonságok:
  - $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
  - $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$

- **Elnyelési szabály**:
  - $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \equiv \alpha$
  - $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv \alpha$
- **Ekvivalencia** átírása:
  - $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- **Kizáró vagy** átírása:
  - $\alpha \oplus \beta \equiv \neg(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$

★ Ekvivalencia- és következmény-fogalom:

! - **Ekvivalens** formulák: Minden interpretációban ugyanaz az az értékük.
- **Ekvivalencia-fogalom**: Állítás arról, hogy a jobb és bal oldalon lévő formulák (~*mondatok*) **minden interpretációban** megegyeznek. Jele: ≡
  - **Különbség az ekvivalencia művelethez képest**: A műveletek inkább egy mondatos kérdésként foghatók fel, amik **egy adott interpretációra** vonatkoznak.
  - **Példa**:
    - "*Igaz-e rám*, hogy akkor és csak akkor szeretem a DM-et, ha ITK-ra járok" : $\alpha \Leftrightarrow \beta$ (ekvivalencia művelet)
      - Itt vannak különböző interpretációk: az is kérdés, hogy "igaz-e, hogy az ITK-ra járok" (első ítéletváltozóban bennfoglalt kérdés), és az is egy kérdés, hogy "igaz-e, hogy szeretem a DM-et" (második ítéletváltozóban bennfoglalt kérdés), és az ezekre való válaszoknak több kombinációja is létezik, ezek az interpretációk.
      - Az egész kifejezés ($\alpha \Leftrightarrow \beta$) akkor lesz igaz, ha vagy ITK-ra járok és szeretem a DM-et, vagy nem vagyok ITK-s és nem szeretem a DM-et. Másra lehet, hogy igaz az, hogy pl ITK-s és nem szereti a DM-et, "az ő interpretációjában" az kérdésre a válasz az, hogy nem (hamis a formula értéke).
    - "*Azt, hogy* akkor és csak akkor szeretem a DM-et, ha ITK-ra járok, *úgy is mondhatom*, hogy vagy az ITK-ra járok és szeretem a DM-et, vagy nem jártok az ITK-ra és nem szeretem a DM-et": $\alpha \Leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (ekvivalencia-fogalom)
      - Lehetséges, hogy ez egy téves állítás, de ezt csak úgy tudom bebizonyítani, hogy megnézem az összes esetet (interpretációt)
- **Következmény-fogalom**: Állítás arról, hogy a bal oldalon lévő formulák (szemantikai) következménye a jobb oldalon álló formula
  - A következmény-fogalom segítségével helyes következtetési sémákat próbálunk készíteni, amiket később (pl egy analízis tétel bizonyítása közben, bűnügyi nyomozás során) fel tudunk használni.
  - **Definíciók** (három ekvivalens definíció):
    ! - $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha minden olyan interpretációban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ formulák **egyszerre igazak** (pl azok a sorok az igazságtáblában, ahol mindegyik formula igaz értéket vesz fel), ott a β-nak is igaznak kell lennie.
    ! - $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ kifejezés tautológia.
      - Miért ekvivalens ez a definíció az előzővel?
        - Az $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ kifejezés azokban az interpretációkban lesz igaz, ahol az összes α egyszerre igaz,
        - az egész kifejezés pedig akkor lesz hamis, ha $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ igaz és β hamis.
        - Így tehát ha azt állítom, hogy $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ kifejezés tautológia, akkor azt is állítom, hogy nincs olyan interpretáció, ahol $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ igaz lenne, β pedig hamis
        - Tehát hogy azokban az interpretációban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ formulák egyszerre igazak, ott a β-nak is igaznak kell lennie.
    ! - $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ kifejezés kontradikció.
      - Miért ekvivalens ez a definíció az előzővel?
        - Ha egy olyan kifejezést negálunk, ami tautológia, akkor kontradikciót kapunk.
        - $\neg((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta)$ kifejezés tehát kontradikció
        - Bontsuk fel az implikációt: $\neg((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta) \equiv \neg(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \vee \beta)$
        - Alkalmazzuk a De Morgan szabályt: $\neg(\neg(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \vee \beta) \equiv ((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \wedge \neg\beta)$

FELADATOK

Formalizálás:

- **Alapfeladat:** Formalizáld a következő mondatokat!
- **FONTOS!**
  - ! Mindig írjuk le, hogy **melyik ítéletváltozóval melyik tagmondatot, szókapcsolatot jelöljük**. Az is jó, ha aláhúzzuk az egyes mondatrészeket, és feléírjuk, hogy melyik betűvel jelölöm, de mindenképp legyen egyértelmű. (Best practice: a betűk utaljanak valahogy arra a tagmondatra, amit jelölnek - pl: lemegyek a boltba > B vagy L a betűjele)
  - ! Az ítéletváltozók olyan tagmondatot jelöljenek, ami már **nem bontható tovább**.
  - ! Az ítéletváltozók által jelölt tagmondatok **ne legyenek negatívak**, vagyok ne legyen bennük tagadás.
  - Bár **többféle megoldás is lehetséges**, mivel többféleképp is értelmezhetők a mondatok, főleg szövegkörnyezetből kiragadva, de ez **nem jelenti azt, hogy minden megoldás jó, amit logikusnak gondolsz**. **Ellenőrzés**képp próbálj meg elképzelni szituációkat (interpretációkat), és helyettesíts be igaz és hamis értékeket ezeknek megfelelően a formulába, és nézd meg, hogy jó eredményt ad-e (vagyis lényegében végig kéne gondni az igazságtábla pár sorát).

1. **Példa:**
   - Ha **hazajössz**, és **be** is **vásárolsz**, akkor **nekem** nem **kell lemennem** és **megfőzhetem az ebédet**.
     - H: **hazajössz**
     - B: **bevásárolsz**
     - L: **nekem le kell mennem**
     - F: **főzhetem az ebédet**
       - $(H \wedge B) \rightarrow (\neg L \wedge F)$
   - A "Ha ... akkor" típusú mondatok szinte biztos, hogy implikációt tartalmaz, de azért végig kell gondolni, mert adódhatnak kivételek.
   - Tagadás NE legyen az atomi formulákban!

2. **Példa:**
   - Ha **a bűncselekményt nem előre megfontolt szándékkal követték el**, akkor **az írásszakértő véleménye helytálló**, annak ellenére, hogy **a szemtanú** nem **megbízható**.
     - B: **a bűncselekményt nem előre megfontolt szándékkal követték el**
     - Í: **az írásszakértő véleménye helytálló**
     - Sz: **a szemtanú megbízható**
       - $B \rightarrow (Í \wedge \neg Sz)$
   - Az hogy hosszú az betű által jelölt tagmondat, az nem baj, de nagyon jól végig kell gondolni, hogy biztos nem bontható-e fel további részekre
   - A "de", "hanem", "ennek ellenére" elsőre tagadásnak tűnhet és nem biztos, hogy egyértelmű, hogy itt ÉS-ről van szó, de az általában igaz, hogy az ellentétes mellérendelő mondatokat (vagyis amiket "de", "hanem", "ennek ellenére" köt össze), azokat is konjunkció kapcsolja össze. Pl: Logikailag ugyanazt jelentik: "Nincs kedvem ZH-t írni, de mégis megírom.","Nincs kedvem ZH-t írni, ennek ellenére mégis megírom.", "Nincs kedvem ZH-t írni, és mégis megírom."

3. **Példa:**
   - **Két vektor skaláris szorzata** akkor és csak akkor **nulla**, ha **merőlegesek** vagy **az egyik nullvektor**.
     - S: **Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla**
     - M: a vektorok **merőlegesek**
     - E: a vektorok közül **az egyik nullvektor**
       - $S \Leftrightarrow (M \vee E) \equiv (S \rightarrow (M \vee E)) \wedge ((M \vee E) \rightarrow S) \equiv (L \wedge (M \vee E)) \vee (\neg L \wedge \neg (M \vee E))$
   - Ez egy példa arra, hogy esetleg jól jöhet az ekvivalencia művelet, de ezt mindenképp át kell írni a második vagy harmadik alakra
   - Jó ellenőrzés az is, ha visszafele megcsinálom a feladatot, mondatot alkotok a formulából, és megnézem, hogy az így kapott mondatok ugyanazt állítják-e.
     - Az, hogy két vektor skaláris szorzata nulla, az ekvivalens azzal, hogy merőlegesek vagy az egyik nullvektor.
     - Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor merőlegesek vagy az egyik nullvektor, és ha két vektor merőleges vagy az egyik nullvektor, akkor skaláris szorzatuk nulla.
     - Vét vektor skaláris szorzatára igaz, hogy vagy nulla, és akkor merőlegesek egymásra vagy az egyik nullvektor; vagy pedig nem nulla, és akkor nem igaz, hogy vagy merőleges, vagy az egyik nullvektor.
       - Erről a harmadikról érezzük, hogy nem igazán jó, bár igazságtáblával bizonyítható, hogy ugyanazt állítja, mint az előtte álló kettő. Ez azért van, mert a köznyelvben használt VAGY alatt nagyon sokszor a KIZÁRÓ VAGY-ot értjük (például ez teszi a formalizálást igen nehéz feladattá).

Igazságtábla:

➢ **Alapfeladat**: Add meg a következő formulák értékét minden interpretációban!

➢ **Tipp:** Ha nem gépiesen akarod megoldani, hanem egy kis okoskodással szeretnéd gyorsabban megoldani.

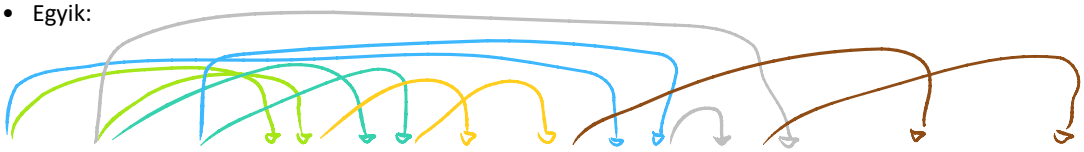
- Az ÉS, VAGY és az IMPLIKÁCIÓ igazságtáblájában 4 sor szerepel, melyek közül az egyik értéke különbözik a másik háromtól:

Konjunkció			**Diszjunkció**			**Implikáció**		
A	B	A ∧ B	A	B	A ∨ B	A	B	A → B
i	i	**i**	i	i	**i**	i	i	**i**
i	h	**h**	i	h	**i**	i	h	**h**
h	i	**h**	h	i	**i**	h	i	**i**
h	h	**h**	h	h	**h**	h	h	**i**

- Az igazságtábla kitöltésekor először ezeket a sorokat keresem meg, ezekbe beírom az értéket, és utána a többi sort automatikusan kitölthetem a másik értékkel.

➢ Példa: [(A∨B) ∧(B∨C)] →[(A∨C) →B]

- Az igazságtáblát kétféleképpen írhatjuk fel:
  - Egyik:



A	B	C	A∨B	B∨C	(A∨B) ∧(B∨C)	(A∨C)	(A∨C) →B	[(A∨B) ∧(B∨C)] →[(A∨C) →B]
i	**i**	**i**	i	i	**i**	i	i	i
i	**i**	**h**	i	i	**i**	i	i	i
i	**h**	**i**	i	i	**i**	i	**h**	**h**
i	**h**	**h**	i	**h**	h	i	**h**	i
h	**i**	**i**	i	i	**i**	i	i	i
h	**i**	**h**	i	i	**i**	**h**	i	i
h	**h**	**i**	**h**	i	h	i	**h**	i
h	**h**	**h**	**h**	**h**	h	**h**	i	i

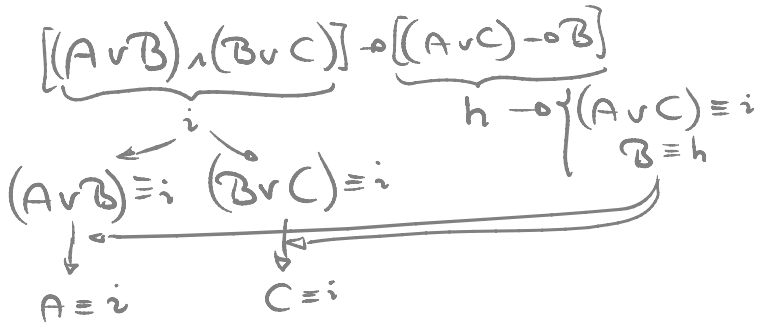
  - Másik:

A	B	C	[(A∨B)	∧	(B∨C)]	→	[(A∨C)	→B]
		Kiértékelés sorrendje:	1.	5.	2.	6.	3.	4.
i	**i**	**i**	i	**i**	i	i	i	i
i	**i**	**h**	i	**i**	i	i	i	i
i	**h**	**i**	i	**i**	i	**h**	i	**h**
i	**h**	**h**	i	h	**h**	i	i	**h**
h	**i**	**i**	i	**i**	i	i	i	i
h	**i**	**h**	i	**i**	i	i	**h**	i
h	**h**	**i**	**h**	h	i	i	i	**h**
h	**h**	**h**	**h**	h	**h**	i	**h**	i

  - **Jelmagyarázat:**
    - Az első igazságtáblánál a nyilak azt jelölik, hogy az adott oszlopot melyik két oszlop között elvégzett művelettel kaptam.
    - A pirossal kiemelt értékek a korábban "Tipp" címszó alatt említett módszer szerint lettek kiemelve, vagyis azokat a sorokat megkerestem, ahol hamis lesz az VAGY vagy IMPLIKÁCIÓ, és igaz lesz az ÉS. Kitöltöttem a megfelelő értékkel, és az oszlop többi helyére beírtam az ellenkező értéket. Jól látható, hogy ezzel a módszerrel az mezők kevesebb, mint feléről kellett eldöntenem, hogy mi az értéke.

! • **FONTOS!** A formula kiértékelésének eredményét mindkét esetben pirossaljelöltem, **a ZH-ban ti is jelöljétek az eredményt adó sort valamilyen egyértelmű módon!**

- **Alternatív megoldási módszer elemi meggondolások mentén:**
  a. Elkezdjük felbontani a kifejezést kisebb részekre:
  b. Az egész kifejezés eredményét a [(A∨B) ∧(B∨C)] és [(A∨C) →B] közti implikáció eredménye fogja adni. Keressük meg tehát azokat az interpretációkat, ahol a teljes kifejezés hamis (azért nem azokat a interpretációkat keressük, ahol igaz lesz a kifejezés, mert abból több van).
  c. Az implikáció csak akkor lesz hamis, ha az bal oldali tag ([(A∨B) ∧(B∨C)]) igaz, a jobb oldali ([(A∨C) →B]) pedig hamis.
  d. A [(A∨C) →B] kifejezés csak akkor lesz hamis, ha (A∨C) igaz, és B hamis.
  e. A [(A∨B) ∧(B∨C)] formula akkor lesz igaz, ha (A∨B) és (B∨C) is igaz.
  f. A (d) pont alapján tudjuk, hogy ahhoz, hogy az egész kifejezés igaz legyen, ahhoz B-nek hamisnak kell lennie. Emiatt ahhoz, hogy az (e) pont állítása szerint az (A∨B) és (B∨C) kifejezések igazak legyenek, ahhoz az szükséges, hogy A és C is igaz legyen.
    - A megoldás tehát az, hogy az igazságtábla azon sorában lesz a hamis érték a megoldásnál, ahol A=C=igaz és B= hamis, a többi helyen igaz értékek fognak szerepelni.
  - Mindez vizuálisan:



  - Megjegyzések:
    - Ha ellentmondásra jutottunk volna, akkor az azt jelentette volna, hogy hamis az a feltevés, hogy van hamis értéket tartalmazó sor, vagyis mindenhol igaz érték szerepelne, másképp mondva tautológiát kapnánk.
    - Ha az egyik változónak így nem tudnánk meghatározni az értékét, akkor az azt jelenti, hogy mindegy milyen értéket kap, vagyis a meglévő megkötések mentén kell megkeresni a hamis értéket tartalmazó sort (pl, ha csak azt tudjuk meg a módszerrel, hogy A igaz és B hamis, akkor azokban a sorokban is hamis fog szerepelni, ahol A igaz, B hamis és C igaz, és azokat is, ahol A igaz, B hamis és C hamis.

Ekvivalencia:

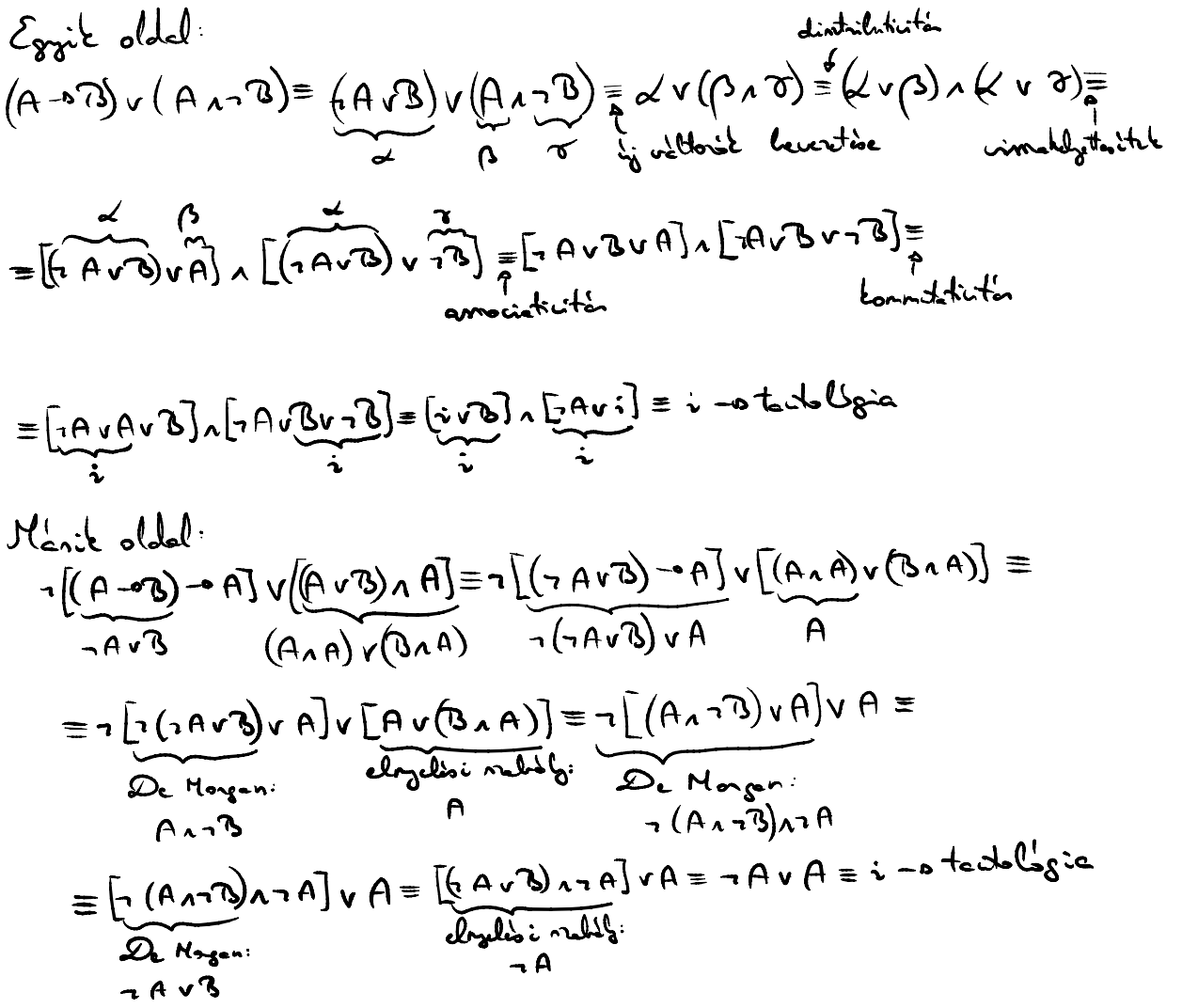
- **Alapfeladat**: Bizonyítsd két formuláról, hogy ekvivalensek!

- **Lehetséges módok**: (általában a feladat megadja, hogy melyikkel kell)
  - **Igazságtábla**: minden interpretációban megegyeznek
  - **Ekvivalens átalakítások**: egyik formulából ekvivalens átalakítások segítségével eljutok a másikba (mivel ekvivalensek az átakítások, ezért mindkét irányba történhet)

1. **Példa**: (A→B)∨(A∧¬B) ≡ ¬((A→B)→A)∨((A∨B)∧A)
   - Megoldás igazságtáblával:

A	B	C	(A→B)	∨	(A∧	¬B)	¬(	(A→B)	→A)	∨	((A∨B)	∧A)
		Kiértékelés sorrendje:	1.	4.	3.	2.	3.	1.	2.	6.	4.	5.
i	**i**	**i**	i	**i**	h	h	h	i	i	**i**	i	i
i	**i**	**h**	i	**i**	h	h	h	i	i	**i**	i	i
i	**h**	**i**	h	**i**	i	i	h	h	i	**i**	i	i
i	**h**	**h**	h	**i**	i	i	h	h	i	**i**	i	i
h	**i**	**i**	i	**i**	h	h	i	i	h	**i**	i	h
h	**i**	**h**	i	**i**	h	h	i	i	h	**i**	i	h
h	**h**	**i**	i	**i**	h	i	i	i	h	**i**	h	h
h	**h**	**h**	i	**i**	h	i	i	i	h	**i**	h	h

- Megoldás ekvivalens átalakításokkal: Mindkét oldalt azonos alakra hozom - jelen esetben megállapítom, hogy mindkét oldal tautológia. Ezt az ekvivalenciát elég körülményes belátni ekvivalens átalakításokkal, inkább csak érdekességként írom.

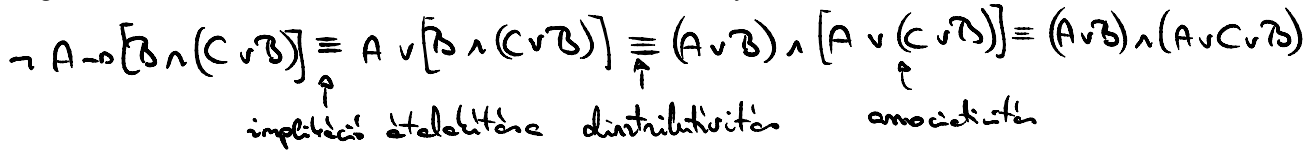


2.Példa: ¬A→[B∧(C∨B)] ≡ (A∨B)∧(A∨C∨B)

- Megoldás igazságtáblával:

A	B	C	¬A	→	[B∧	(C∨B)]	(A∨B)	∧	(A∨C	∨B)
		Kiértékelés sorrendje:	1.	4.	3.	2.	1.	4.	2.	3.
i	**i**	**i**	h	**i**	i	i	i	**i**	i	i
i	**i**	**h**	h	**i**	i	i	i	**i**	i	i
i	**h**	**i**	h	**i**	h	i	i	**i**	i	i
i	**h**	**h**	h	**i**	h	h	i	**i**	i	i
h	**i**	**i**	i	**i**	i	i	i	**i**	i	i
h	**i**	**h**	i	**i**	i	i	i	**i**	h	i
h	**h**	**i**	i	**h**	h	i	h	**h**	i	i
h	**h**	**h**	i	**h**	h	h	h	**h**	h	h

- Megoldás ekvivalens átalakításokkal: A bal oldali formulát átalakítom a jobb oldalivá.



Következmény:

- **Alapfeladat**: Bizonyítsd be egy következtetési sémáról, hogy helyes!

- **Lehetséges módok**: (igazságtáblával háromféle definíció alapján)
  1. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha minden olyan interpretációban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ formulák **egyszerre igazak** (pl azok a sorok az igazságtáblában, ahol mindegyik formula igaz értéket vesz fel), ott a β-nak is igaznak kell lennie.
  2. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ kifejezés tautológia.
  3. $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vDash \beta$ helyes következtetési séma, ha $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ kifejezés kontradikció.

1. **Példa:** $\{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow A\} \vDash C \vee A$
   - Első definíció alapján:

A	B	C	A∨B	A→C	B→A	C∨A
i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**i**	**h**	i	h	i	i
i	**h**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**
i	**h**	**h**	i	h	i	i
h	**i**	**i**	i	i	h	i
h	**i**	**h**	i	i	h	h
h	**h**	**i**	h	i	i	i
h	**h**	**h**	h	i	i	h

     - Az igazságtáblából látszik tehát, hogy azokban a sorokban (interpretációkban), ahol az összes feltevés ($A \vee B$, $A \rightarrow C$, $B \rightarrow A$) egyszerre igaz, ott a következmény is igaz. A többi sorral nem foglalkozunk.

   - Második definíció alapján:

A	B	C	(A∨B	∧	A→C	∧	B→A)	→	C∨A
i	**i**	**i**	i	i	i	i	i	**i**	i
i	**i**	**h**	i	h	h	h	i	**i**	i
i	**h**	**i**	i	i	i	i	i	**i**	i
i	**h**	**h**	i	h	h	h	i	**i**	i
h	**i**	**i**	i	i	i	h	h	**i**	i
h	**i**	**h**	i	i	i	h	h	**i**	h
h	**h**	**i**	h	h	i	h	i	**i**	i
h	**h**	**h**	h	h	i	h	i	**i**	h

     - Az eredmény tautológia, tehát megintcsak beláttuk, hogy helyes a következtetési séma.

   - Harmadik definíció alapján:

A	B	C	A∨B	∧	A→C	∧	B→A	∧	¬	(C∨A)
i	**i**	**i**	i	i	i	i	i	**h**	h	i
i	**i**	**h**	i	h	h	h	i	**h**	h	i
i	**h**	**i**	i	i	i	i	i	**h**	h	i
i	**h**	**h**	i	h	h	h	i	**h**	h	i
h	**i**	**i**	i	i	i	h	h	**h**	h	i
h	**i**	**h**	i	i	i	h	h	**h**	i	h
h	**h**	**i**	h	h	i	h	i	**h**	h	i
h	**h**	**h**	h	h	i	h	i	**h**	i	h

     - Az eredmény kontradikció, tehát újból beláttuk, hogy helyes a következtetési séma.

2. **Példa:** {(A∨B)→A, (B→A)∨C} ⊨ ¬A∨B
   - Első definíció alapján:

A	B	C	(A∨B)	→A	(B→A)	∨C	¬A	∨B
i	**i**	**i**	i	**i**	i	**i**	h	**i**
i	**i**	**h**	i	**i**	i	**i**	h	**i**
i	**h**	**i**	i	**i**	i	**i**	h	**h**
i	**h**	**h**	i	**i**	i	**i**	h	**h**
h	**i**	**i**	i	h	h	i	i	i
h	**i**	**h**	i	h	h	h	i	i
h	**h**	**i**	h	**i**	i	**i**	i	**i**
h	**h**	**h**	h	**i**	i	**i**	i	**i**

   - Az következtetési séma akkor lenne igaz, ha azokban a sorokban (interpretációkban), ahol az összes feltevés ((A∨B)→A, (B→A)∨C) egyszerre igaz, ott a következmény is igaz. Ez kettő sorban nem igaz (pirossal kiemelve), tehát ez egy helytelen következtetési séma.